ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ИРКУТСКОЙ ОБЛАСТИ «ЧЕРЕМХОВСКИЙ ГОРНОТЕХНИЧЕСКИЙ КОЛЛЕДЖ ИМ. М.И. ЩАДОВА»

РАССМОТРЕНО
на заседании ЦК
«Информатики и ВТ»
Протокол №5
«09» января 2024 г.
Председатель: Чипиштанова Д.В.

УТВЕРЖДАЮ
Зам. директора по УР
О.В. Папанова
«22» февраля 2024 г.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

по практическим занятиям студентов

Учебной дисциплины

ЕН. 01 Математики

23.02.01 Организация перевозок и управление на транспорте (по видам)

Разработал:
Окладникова Т.В.

2024 г.

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 54CE6FF6F2E941EC6571CFEA2EAFB5E4
Владелец: Сычев Сергей Николаевич
Действителен: с 23.08.2024 до 16.11.2025

СОДЕРЖАНИЕ

1.ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Методические указания по практическим занятиям учебной дисциплины **«Математика»** составлены в соответствии с учебным планом и рабочей программы дисциплины по специальности ***23.02.01 Организация перевозок и управление на транспорте (по видам).***

Цель проведения практических занятий: формирование практических умений, необходимых в последующей профессиональной и учебной деятельности.

Методические указания практических занятий являются частью учебно-методического комплекса по учебной дисциплине и содержат:

- тему занятия (согласно тематическому плану учебной дисциплины);
- цель;
- оборудование (материалы, программное обеспечение, оснащение, раздаточный материал и др.);
- методические указания (изучить краткий теоретический материал по теме практического занятия);
- ход выполнения;
- форму отчета.

В результате выполнения полного объема заданий практических занятий студент должен **уметь:**

– выполнять операции над матрицами и решать системы линейных уравнений;
– применять методы дифференциального и интегрального исчисления;
– решать дифференциальные уравнения.

При проведении практических работ применяются следующие технологии и методы обучения: чтение с маркировкой, «фишбон», информационные технологии, ментальные карты и т.д.

Оценка выполнения заданий практических (лабораторных) занятий

«Отлично» - теоретическое содержание курса освоено полностью, без пробелов, умения сформированы, все предусмотренные программой учебные задания выполнены, качество их выполнения оценено высоко.

«Хорошо» - теоретическое содержание курса освоено полностью, без пробелов, некоторые умения сформированы недостаточно, все предусмотренные программой учебные задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками.

«Удовлетворительно» - теоретическое содержание курса освоено частично, но пробелы не носят существенного характера, необходимые умения работы с освоенным материалом в основном сформированы, большинство предусмотренных программой обучения учебных заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки.

«Неудовлетворительно» - теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки.

В соответствии с учебным планом и рабочей программы дисциплины **«Математика»** на практические (лабораторные) занятия отводится **_20_ часов.**

2. ПЕРЕЧЕНЬ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

№ п/п	Тема практических занятий	Количество часов
1	**Практическое занятие №1** Вычисление производных и определенных интегралов	2
2	**Практическое задание№2** Вычисление неопределенных интегралов	2
3	**Практическое задание№3** Решение задач	2
4	**Практическое занятие №4** Решение дифференциальных уравнений на простейших задачах.	2
5	**Практическое занятие №5** Решение дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными	2
6	**Практические занятия №6** Решение дифференциальных уравнений первого и второго порядка	2
7	**Практические занятия №7** Определение сходимости числовых и функциональных рядов	2
8	**Практическое занятие №8** Разложение элементарных функций в ряд Маклорена	2
9	**Практическое занятие №9** Вычисление интегралов и производных по формулам Симпсона и Ньютона	2
10	**Практическое задание№10** **Решение задач** на тему Тема 1.7. Основы теории вероятности и математической статистики	2

3. СОДЕРЖАНИЕ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАДАНИЙ

Практическое задание№ 1

Тема: Вычисление производных и определенных интегралов
Цель: закрепить знанию в области решения производных
Оборудование: тетрадь, ручка
Методические указания: выполните задания
Ход выполнения:
Задание 1. Изучить теоретические сведения к практической работе
Таблица производных основных элементарных функций:

1. $(c)' = 0, (cu)' = cu'$;
2. $x' = 1$
3. $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' \quad (n \in R)$
4. $(\sqrt{u})' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$
5. $(\dfrac{1}{u^n})' = -\dfrac{n}{u^{n+1}} \cdot u'$

12. $(\log_a u)' = \dfrac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$
13. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$
14. $(\cos u)' = \sin u \cdot u'$
15. $(tgu)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$
16. $(ctgu)' = \dfrac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$

6. $(u+v)' = u' + v'$;

7. $(uv)' = u'v + v'u$;

8. $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$

9. $(e^u)' = e^u \cdot u'$

10. $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$

11. $(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$

17. $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$

18. $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$

19. $(arctgu)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$

20. $(arcctgu)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$

Задание 2. Найти производные заданных функций

1) $y = x^2 \cdot \ln x$; 2) $y = arctge^x$; 3) $y = \sin^2 tgx$, 4) $y = \frac{3x+1}{e^x}$;

5) $y = \left(x^3+1\right) \cdot \cos x$, 6) $y = x^2 e^{x^2+3x}$,7) $y = \frac{3\cos x}{2x+1}$, 8) $y = 2x^3 + 3\sin^2 5x$;

9) $y = x^2 \cdot tgx$, 10) $y = \frac{\log_5 x}{5^x}$; 11) $y = \sin x \cdot \ln x$; 12) $y = Sin\sqrt{1-x^2}$;

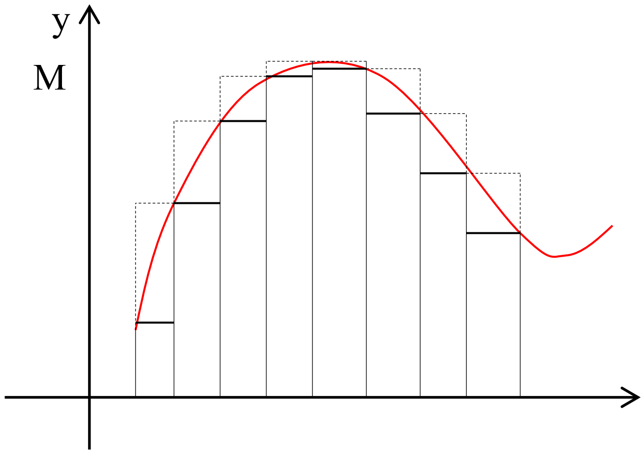
13) $y = \frac{6^x}{\cos x}$; 14) $y = \ln\left(1+\sqrt{x}\right)$; 15) $y = \frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^8}$; 16) $y = x^2 \cdot arctgx^2$;

17) $y = \frac{\arcsin x}{x^2}$, 18) $f(x) = \frac{\ln x}{x-1}$; 19) $y = e^x \cdot tgx$ 20) $y = \ln\sin 5x$

Задание 3. Изучите теоретические сведения

Таблица интегралов

1. $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, (n \neq -1)$	7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = ctgx + C$	13. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctgx + C$
2. $\int dx = x + C$	8. $\int tgxdx = \ln\lvert\cos x\rvert + C$	14. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{a+x}{a-x}\right\rvert + C$
3. $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$	9. $\int ctgxdx = \ln\lvert\sin x\rvert + C$	15. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$
4. $\int \sin xdx = -\cos xdx$	10. $\int e^x\,dx = e^x + C$	16. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$
5. $\int \cos xdx = \sin xdx$	11. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	
6. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$	12. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$	



m

0 a x_i b x

Обозначим m и M наименьшее и наибольшее значение функции на отрезке [a, b]

Разобьем отрезок [a, b] на части (не обязательно одинаковые) n точками.

$x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n$

Тогда $x_1 - x_0 = \Delta x_1$, $x_2 - x_1 = \Delta x_2$, … ,$x_n - x_{n-1} = \Delta x_n$;

На каждом из полученных отрезков найдем наименьшее и наибольшее значение функции.

$[x_0, x_1] \to m_1, M_1$; $[x_1, x_2] \to m_2, M_2$; … $[x_{n-1}, x_n] \to m_n, M_n$.

Составим суммы:

$$\underline{S}_n = m_1\Delta x_1 + m_2\Delta x_2 + \ldots + m_n\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$$

$$\overline{S}_n = M_1\Delta x_1 + M_2\Delta x_2 + \ldots + M_n\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$$

Сумма $\underline{S}$ называется **нижней интегральной суммой**, а сумма $\overline{S}$ – **верхней интегральной суммой**.

Т.к. $m_i \le M_i$, то $\underline{S}_n \le \overline{S}_n$, а $m(b - a) \le \underline{S}_n \le \overline{S}_n \le M(b - a)$

Внутри каждого отрезка выберем некоторую точку ε.

$x_0 < \varepsilon_1 < x_1$, $x_1 < \varepsilon < x_2$, … , $x_{n-1} < \varepsilon < x_n$.

Найдем значения функции в этих точках и составим выражение, которое называется **интегральной суммой** для функции f(x) на отрезке [a, b].

$$S_n = f(\varepsilon_1)\Delta x_1 + f(\varepsilon_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\varepsilon_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i$$

Тогда можно записать: $m_i\Delta x_i \le f(\varepsilon_i)\Delta x_i \le M_i\Delta x_i$

Следовательно, $\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$

$$\underline{S_n} \le S_n \le \overline{S_n}$$

Геометрически это представляется следующим образом: график функции f(x) ограничен сверху описанной ломаной линией, а снизу – вписанной ломаной.

Обозначим $max\Delta x_i$ – наибольший отрезок разбиения, а $min\Delta x_i$ – наименьший. Если $max\Delta x_i \to 0$, то число отрезков разбиения отрезка [a, b] стремится к бесконечности.

Если $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i$, то $\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i = S.$

Определение: Если при любых разбиениях отрезка [a, b] таких, что $max\Delta x_i \to 0$ и произвольном выборе точек ε_i интегральная сумма $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i$ стремится к пределу S, который называется определенным интегралом от f(x) на отрезке [a, b].

Обозначение : $\int_a^b f(x)dx.$

a – нижний предел, b – верхний предел, x – переменная интегрирования, [a, b] – отрезок интегрирования.

Определение: Если для функции f(x) существует предел $\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx,$ то функция называется **интегрируемой** на отрезке [a, b].

Также верны утверждения: $\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$$

Теорема: Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b], то она интегрируема на этом отрезке.

Свойства определенного интеграла.

1) $\int_a^b Af(x)dx = A\int_a^b f(x)dx;$
2) $\int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx$
3) $\int_a^a f(x)dx = 0$
4) Если f(x) ≤ φ(x) на отрезке [a, b] a < b, то $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b \varphi(x)dx$
5) Если m и M – соответственно наименьшее и наибольшее значения функции f(x) на отрезке [a, b], то:

$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$

6) **Теорема о среднем.** Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b], то на этом отрезке существует точка ε такая, что

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\varepsilon)$$

Доказательство: В соответствии со свойством 5:

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M$$

т.к. функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b], то она принимает на этом отрезке все значения от m до M. Другими словами, существует такое число ε∈ [a, b], что если $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \mu$ и μ = f(ε), а a ≤ ε ≤ b, тогда $\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\varepsilon)$. Теорема доказана.

7) Для произвольных чисел a, b, c справедливо равенство:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Разумеется, это равенство выполняется, если существует каждый из входящих в него интегралов.

8) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

Обобщенная теорема о среднем. Если функции f(x) и φ(x) непрерывны на отрезке [a, b], и функция φ(x) знакопостоянна на нем, то на этом отрезке существует точка ε, такая, что

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = f(\varepsilon)\int_a^b \varphi(x)dx$$

Теорема Ньютона-Лейбница.

Пусть в интеграле $\int_a^b f(x)dx$ нижний предел a = const, а верхний предел b изменяется. Очевидно, что если изменяется верхний предел, то изменяется и значение интеграа.

Обозначим $\int_a^x f(t)dt$ = Φ(x). Найдем производную функции Φ(x) по переменному верхнему пределу x.

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

Аналогичную теорему можно доказать для случая переменного нижнего предела.

Теорема: для всякой функции f(x), непрерывной на отрезке [a, b], существует на этом отрезке первообразная, а значит, существует неопределенный интеграл.

Теорема: (Теорема Ньютона – Лейбница)

Если функция F(x) – какая- либо первообразная от непрерывной функции f(x), то $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

это выражение известно под названием формулы Ньютона – Лейбница.

Доказательство: пусть F(x) – первообразная функции f(x). Тогда в соответствии с приведенной выше теоремой, функция $\int_a^x f(t)dt$ - первообразная функция от f(x). Но т.к. функция может иметь бесконечно много первообразных, которые будут отличаться друг от друга только на какое – то постоянное число С, то

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) + C$$

при соответствующем выборе С это равенство справедливо для любого x, т.е. при x = a:

$$\int_a^a f(t)dt = F(a) + C$$

$$0 = F(a) + C$$

$$C = -F(a)$$

Тогда $\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$.

А при x = b: $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$

Заменив переменную t на переменную x, получаем формулу Ньютона – Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Теорема доказана.

Иногда применяют обозначение F(b) – F(a) = $F(x)\Big|_a^b$.

Формула Ньютона – Лейбница представляет собой общий подход к нахождению определенных интегралов.

Что касается приемов вычисления определенных интегралов, то они практически ничем не отличаются от всех тех приемов и методов, которые были рассмотрены выше при нахождении неопределенных интегралов.

Точно так же применяются методы подстановки (замены переменной), метод интегрирования по частям, те же приемы нахождения первообразных для тригонометрических, иррациональных и трансцендентных функций. Особенностью является только то, что при применении этих приемов надо распространять преобразование не только на подинтегральную функцию, но и на пределы интегрирования. Заменяя переменную интегрирования, не забыть изменить соответственно пределы интегрирования.

Пусть задан интеграл $\int_a^b f(x)dx$, где f(x) – непрерывная функция на отрезке [a, b].

Введем новую переменную в соответствии с формулой x = φ(t).

Тогда если

1) φ(α) = a, φ(β) = b

2) φ(t) и φ′(t) непрерывны на отрезке [α, β]

3) f(φ(t)) определена на отрезке [α, β], то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

Тогда $\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = F[\varphi(t)]\Big|_\alpha^\beta = F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)] = F(b) - F(a)$

<u>Пример.</u>

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \left\{\begin{matrix} x = \sin t; \\ \alpha = 0; \beta = \pi/2 \end{matrix}\right\} = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2t)dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\sin\pi = \frac{\pi}{4}.$$

При замене переменной в определенном интеграле следует помнить о том, что вводимая функция (в рассмотренном примере это функция sin) должна быть непрерывна на отрезке интегрирования. В противном случае формальное применение формулы приводит к абсурду.

<u>Пример.</u>

$\int_0^\pi dx = x\Big|_0^\pi = \pi$, с другой стороны, если применить тригонометрическую подстановку,

$$\int_0^\pi dx = \int_0^\pi \frac{dx}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \int_0^\pi \frac{dx}{\cos^2 x(1+tg^2 x)} = \{tgx = t\} = \int_0^0 \frac{dt}{1+t^2} = 0$$

Т.е. два способа нахождения интеграла дают различные результаты. Это произошло из-за того, что не был учтен тот факт, что введенная переменная tgx имеет на отрезке интегрирования разрыв (в точке x = π/2). Поэтому в данном случае такая подстановка неприменима. При замене переменной в определенном интеграле следует внимательно следить за выполнением перечисленных выше условий.

Интегрирование по частям.

Если функции u = φ(x) и v = ψ(x) непрерывны на отрезке [a, b], а также непрерывны на этом отрезке их производные, то справедлива формула интегрирования по частям:

$$\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

Вывод этой формулы абсолютно аналогичен выводу формулы интегрирования по частям для неопределенного интеграла, который был весьма подробно рассмотрен выше, поэтому здесь приводить его нет смысла.

Задание 4. Вычислить определенные интегралы:

1. [redacted] 2. [redacted] 3. [redacted] 4. [redacted] 5. [redacted] 6. [redacted] 7. [redacted]

8. [redacted] 9. [redacted] 10. [redacted] 11. [redacted] 12. [redacted] 13. [redacted]

14. [redacted] 15. [redacted] 16. [redacted]

Форма отчета: решение задачи, защита

Практическое задание№2

Тема: Вычисление неопределенных интегралов

Цель: научиться вычислять неопределенный интегралы

Оборудование: тетрадь, ручка

Методические указания: выполните задания

Ход выполнения:

Задание 1. Решить примеры используя метод интегрирования

1. $\int (2x^3 - 5x^2 + 7x - 3)dx$
2. $\int x^5 dx$
3. $\int \frac{dx}{3 - x^2}$
4. $\int \frac{2x+5}{3x^2 - 10}dx$
5. $\int \left(\frac{5}{\sqrt{x}} - \sqrt[3]{x^2} \right)dx$
6. $\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right)^2 dx$
7. $\int 2^x \cdot e^x dx$
8. $\int \frac{dx}{16x^2 + 9}$
9. $\int (x^2+1)(x-2)dx$
10. $\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}dx$
11. $\int \frac{(1-x)^3}{x^2}dx$

Задание 2. Используя метод замены переменной решить следующие примеры

1. $\int \sin^3 5x \cos 5x dx$
2. $\int ctg(2x+1)dx$
3. $\int x^3 \cos(x^4)dx$
4. $\int \cos x \cdot 3^{\sin x} dx$
5. $\int \sin(2-7x)dx$
6. $\int \frac{2x+1}{4x^2-1}dx$
7. $\int \frac{xdx}{x^4+4}$
8. $\int \frac{e^{3x}dx}{9+e^{6x}}$
9. $\int \frac{x^3 dx}{1+x^4}$
10. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\ln x}}{x}$

Форма отчета: решение задач, защита

Практическое задание№3

Тема: Решение задач
Цель: научиться вычислять площади плоской фигуры
Оборудование: тетрадь, ручка
Методические указания: выполните задания
Ход выполнения:
Задание 1. Решить задачи

Задача 1. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями

$y = 8x - 2x^2, y = 8, x = 0$.

Задача 2. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

Параболой $y = x^2$, касательной к ней в точке с абсциссой $x_0 = 1$, осью y;

Задача 3. Найти массу M неоднородного стержня AB, если плотность $\rho(x)$ = sinx + 1. $AB = \pi$.
Форма отчета: решение задач, защита.

Практическое задание№ 4

Тема: Решение дифференциальных уравнений на простейших задачах.

Цель: проверить на практике знание понятия дифференциального уравнения, виды дифференциальных уравнений, умение решать дифференциальные уравнения I и II –го порядков, находить общее и частное решение.

Оборудование: тетрадь, ручка

Методические указания: выполните задания

Ход выполнения:

Задание 1. Изучить теоретический материал и примеры решения дифференциальных уравнений.

1. Дифференциальное уравнение первого порядка, содержит:
1) независимую переменную x;
2) зависимую переменную y (функцию);
3) первую производную функции: y'.

Решить дифференциальное уравнение – это значит, найти множество функций $y = f(x) + C$, которые удовлетворяют данному уравнению. Такое множество функций называется общим решением дифференциального уравнения.

Пример 1

Решить дифференциальное уравнение $xy' = y$

$y' = \frac{dy}{dx}$. $x \cdot \frac{dy}{dx} = y$

В рассматриваемом примере переменные легко разделяются перекидыванием множителей по правилу пропорции:

$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$

Переменные разделены. В левой части – только «игреки», в правой части – только «иксы».

Следующий этап – интегрирование дифференциального уравнения. Интегрируем обе части:

$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$

$\ln|y| = \ln|x| + C$

Решение дифференциального уравнения в неявном виде называется общим интегралом дифференциального уравнения. То есть, $\ln|y| = \ln|x| + C$ – это общий интеграл.

Вместо записи $\ln|y| = \ln|x| + C$ обычно пишут $\ln|y| = \ln|x| + \ln|C|$.

В данном случае:

$\ln|y| = \ln|Cx|$

$y = Cx$

Функция представлена в явном виде. Это и есть общее решение.

Множество функций $y = Cx$, где $C = const$ является общим решением дифференциального уравнения $xy' = y$.
Придавая константе C различные значения, можно получить бесконечно много частных решений дифференциального уравнения.
Пример 2
Найти частное решение дифференциального уравнения $y' = -2y$, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 2$
По условию требуется найти частное решение ДУ, удовлетворяющее начальному условию. Такая постановка вопроса также называется задачей Коши.
Сначала находим общее решение.
$\frac{dy}{dx} = -2y$ $\frac{dy}{y} = -2dx$
Интегрируем уравнение:
$\int \frac{dy}{y} = -2\int dx$
$\ln|y| = -2x + C^*$
$y = e^{-2x+C^*}$
$y = e^{C^*} \cdot e^{-2x}$
Итак, общее решение: $y = Ce^{-2x}$, где $C = const$. На завершающем этапе нужно найти частное решение, удовлетворяющее заданному начальному условию $y(0) = 2$.
Необходимо подобрать такое значение константы C, чтобы выполнялось заданное начальное условие $y(0) = 2$.
В общее решение вместо «икса» подставляем ноль, а вместо «игрека» двойку: $y(0) = Ce^{-2\cdot 0} = Ce^0 = C = 2$
В общее решение $y = Ce^{-2x}$ подставляем найденное значение константы $C = 2$: $y = 2e^{-2x}$ – это и есть нужное нам частное решение.
Пример 3
Решить дифференциальное уравнение $y' + (2y+1)ctgx = 0$
Решение: Переписываем производную в нужном нам виде: $\frac{dy}{dx} + (2y+1)ctgx = 0$
Переносим второе слагаемое в правую часть со сменой знака: $\frac{dy}{dx} = -(2y+1)ctgx$
$\frac{dy}{2y+1} = -ctgxdx$
Переменные разделены, интегрируем обе части: $\int \frac{dy}{2y+1} = -\int ctgxdx$

$$\int \frac{dy}{2y+1} = -\int \frac{\cos x dx}{\sin x}$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{d(2y+1)}{2y+1} = -\int \frac{d(\sin x)}{\sin x}$$

$$\frac{1}{2}\ln|2y+1| = -\ln|\sin x| + \ln|C|$$

Решение распишу очень подробно:

$$\ln|2y+1|^{\frac{1}{2}} = \ln|\sin x|^{-1} + \ln|C|$$

$$\ln\sqrt{2y+1} = \ln\frac{1}{|\sin x|} + \ln|C|$$

$$\ln\sqrt{2y+1} = \ln\left|\frac{C}{\sin x}\right|$$

$$\sqrt{2y+1} = \frac{C}{\sin x}$$

Ответ: общий интеграл: $\sqrt{2y+1}\cdot\sin x = C$, где $C = const$

Примечание: общий интеграл любого уравнения можно записать не единственным способом. Таким образом, если у вас не совпал результат с заранее известным ответом, то это еще не значит, что вы неправильно решили уравнение.

Пример 4

Найти частное решение дифференциального уравнения $e^{y-x^2}dy - 2xdx = 0$, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = \ln 2$. Выполнить проверку.

Решение: Сначала найдем общее решение. Данное уравнение уже содержит готовые дифференциалы dy и dx, а значит, решение упрощается. Разделяем переменные:

$$e^y \cdot e^{-x^2}dy - 2xdx = 0$$

$$e^y \cdot e^{-x^2}dy = 2xdx$$

$$e^y dy = \frac{2xdx}{e^{-x^2}}$$

$$e^y dy = 2xe^{x^2}dx$$

Интегрируем уравнение:

$$\int e^y dy = 2\int xe^{x^2}dx$$

$$\int e^y dy = \int e^{x^2}d(x^2)$$

$$e^y = e^{x^2} + C$$

$$\ln e^y = \ln(e^{x^2} + C)$$

$$y = \ln(e^{x^2} + C)$$

общее решение:

$y = \ln(e^{x^2} + C)$, где $C = const$

Найдем частное решение, соответствующее заданному начальному условию $y(0) = \ln 2$

$\ln 2 = \ln(e^0 + C)$

$\ln 2 = \ln(1 + C) \Rightarrow C = 1$

$y(0) = \ln(e^0 + C) = \ln(1 + C) = \ln 2 \Rightarrow C = 1$

Подставляем найденное значение константы $C = 1$ в общее решение.

Ответ: частное решение: $y = \ln(e^{x^2} + 1)$

2.Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

В теории и практике различают два типа таких уравнений – однородное уравнение и неоднородное уравнение.

Однородное ДУ второго порядка с постоянными коэффициентами имеет следующий вид: $y'' + py' + qy = 0$, где p и q – константы (числа), а в правой части – строго ноль.

Неоднородное ДУ второго порядка с постоянными коэффициентами имеет вид: $y'' + py' + qy = f(x)$, где p и q – константы, а $f(x)$ – функция, зависящая только от «икс». В простейшем случае функция $f(x)$ может быть числом, отличным от нуля.

Какая мысль приходит в голову после беглого взгляда? Неоднородное уравнение кажется сложнее. На этот раз первое впечатление не подводит!

Кроме того, чтобы научиться решать неоднородные уравнения необходимо уметь решать однородные уравнения. По этой причине сначала рассмотрим алгоритм решения линейного однородного уравнения второго порядка: $y'' + py' + qy = 0$

Для того чтобы решить данное ДУ, нужно составить так называемое характеристическое уравнение: $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$

По какому принципу составлено характеристическое уравнение, отчётливо видно: вместо второй производной записываем λ^2; вместо первой производной записываем просто «лямбду»; вместо функции y ничего не записываем.

$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ – это обычное квадратное уравнение, которое предстоит решить.

Существуют три варианта развития событий. Они доказаны в курсе математического анализа, и на практике мы будет использовать готовые формулы.

Характеристическое уравнение имеет два различных действительных корня

Если характеристическое уравнение $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ имеет два различных действительных корня λ_1, λ_2 (т.е., если дискриминант $D > 0$), то общее решение однородного уравнения выглядит так: $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$, где C_1, C_2 – константы.

В случае если один из корней равен нулю, решение очевидным образом упрощается; пусть, например, $\lambda_1 = 0$, тогда общее решение: $y = C_1e^{0\cdot x} + C_2e^{\lambda_2 x} = C_1 + C_2e^{\lambda_2 x}$

Пример 5

Решить дифференциальное уравнение $y'' + y' - 2y = 0$

Решение: составим и решим характеристическое уравнение:

$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$

$D = 1 + 8 = 9; \sqrt{D} = 3$

$\lambda_1 = \frac{-1-3}{2} = -2$, $\lambda_2 = \frac{-1+3}{2} = 1$

$y = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x}$

Ответ: общее решение: $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{x},\ где\ C_1, C_2 - const$

Характеристическое уравнение имеет два кратных действительных корня

Если характеристическое уравнение $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ имеет два кратных (совпавших) действительных корня $\lambda_1 = \lambda_2$ (дискриминант $D = 0$), то общее решение однородного уравнения принимает вид: $y = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2xe^{\lambda_1 x}$, где C_1, C_2 – константы.

Вместо λ_1 в формуле можно было нарисовать λ_2, корни всё равно одинаковы.

Если оба корня равны нулю $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, то общее решение опять же упрощается: $y = C_1e^{0\cdot x} + C_2xe^{0\cdot x} = C_1 + C_2x$. Кстати, $y = C_1 + C_2x$ является общим решением того самого примитивного уравнения $y'' = 0$, о котором я упоминал в начале урока. уравнение: $\lambda^2 = 0$ – действительно, данное уравнение как раз и имеет совпавшие нулевые корни $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Пример 6

Решить дифференциальное уравнение $y'' - 6y' + 9y = 0$

Решение: составим и решим характеристическое уравнение:

$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$

Здесь можно вычислить дискриминант, получить ноль и найти кратные корни. Но можно невозбранно применить известную школьную формулу сокращенного умножения:

$(\lambda - 3)^2 = 0$

Получены два кратных действительных корня $\lambda_{1,2} = 3$

Ответ: общее решение: $y = C_1e^{3x} + C_2xe^{3x},\ где\ C_1, C_2 - const$

Характеристическое уравнение имеет сопряженные комплексные корни

Если характеристическое уравнение $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ имеет сопряженные комплексные корни $\lambda_1 = \alpha - \beta i$, $\lambda_2 = \alpha + \beta i$ (дискриминант $D < 0$), то общее решение однородного уравнения принимает вид: $y = e^{\alpha x} \cdot (C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)$, где C_1, C_2 – константы.

Примечание: Сопряженные комплексные корни почти всегда записывают кратко следующим образом: $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$

Если получаются чисто мнимые сопряженные комплексные корни: $\lambda_{1,2} = \pm\beta i$, то общее решение упрощается: $y = e^{0\cdot x} \cdot (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) = C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x$

Пример 7

Решить однородное дифференциальное уравнение второго порядка $y'' - 2y' + 10y = 0$

Решение: Составим и решим характеристическое уравнение:

$\lambda^2 - 2\lambda + 10 = 0$

$D = 4 - 40 = -36$

$\lambda_{1,2} = \dfrac{2 \pm 6i}{2} = 1 \pm 3i$ – получены сопряженные комплексные корни

Ответ: общее решение: $y = e^x (C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x),\ где\ \ C_1, C_2 - const$

Пример 8

Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$

$y'' - 4y = 0$

Решение: составим и решим характеристическое уравнение:

$\lambda^2 - 4 = 0$

$(\lambda + 2)(\lambda - 2) = 0$

$\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 2$

Получены два различных действительных корня, поэтому общее решение: $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x},\ где\ \ C_1, C_2 - const$

Алгоритм нахождения частного решения следующий:

Сначала используем начальное условие $y(0) = 1$: $y(0) = C_1 e^{-2\cdot 0} + C_2 e^{2\cdot 0} = C_1 + C_2$

Согласно начальному условию, получаем <u>первое уравнение</u>: $y(0) = C_1 + C_2 = 1$ или просто $C_1 + C_2 = 1$

Далее берём наше общее решение $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x}$ и находим производную: $y' = (C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x})' = -2C_1 e^{-2x} + 2C_2 e^{2x}$

Используем второе начальное условие $y'(0) = 2$: $y'(0) = -2C_1 e^{-2\cdot 0} + 2C_2 e^{2\cdot 0} = -2C_1 + 2C_2$

Согласно второму начальному условию, получаем <u>второе уравнение</u>: $y'(0) = -2C_1 + 2C_2 = 2$ или просто $-2C_1 + 2C_2 = 2$

Составим и решим систему из двух найденных уравнений:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ -2C_1 + 2C_2 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ -2C_1 + 2C_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ -C_1 + C_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow 2C_2 = 2$$

$C_2 = 1;\ C_1 = 0$

Подставим найденные значения констант $C_1 = 0;\ C_2 = 1$ в общее решение $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x}$
:

$y = 0 \cdot e^{-2x} + 1 \cdot e^{2x} = e^{2x}$

Ответ: частное решение: $y = e^{2x}$

Задание 2. Выяснить, являются ли решениями данных дифференциальных уравнений, указанные функции**:**

1) $y' = 3x^2 + 2; y = x^3 + 2x;$

2) $y' = 4y + 3; y = \dfrac{e^{4x} - 3}{4};$

3) $y'' = x + y'; y = \dfrac{1}{x};$

4) $\dfrac{d^2 y}{dt^2} + 4y = 0, y = 5\cos(2t + 3);$

5) $y' - y = e^x; y = (x + 2)e^x;$

6) $y'' + y = 2; y = xe^x;$

7) $(x + 2)dx - 2dy = 0; y = \dfrac{x^2}{4} + x;$

8) $3y - xy' = 0; y = 4x^2 + 1;$

9) $y' - 2x = 1; y = e^2 + x;$

10) $y'' - 2y' + y = 0; y = xe^x.$

Задание 3. Найти общее решение следующих дифференциальных уравнений:

1) $y' = 2y^2;$

2) $y' = 2x^2 + 1;$

3) $y' = 5y;$

4) $y' = \sin x + \cos x;$

5) $xyy' = 0{,}5;$

6) $3x\,dy = 2y\,dx;$

7) $(x + 1)dx - 2xydy = 0;$

8) $4x - 3y^2 y' = 0;$

9) $y'(x + 1) = 1;$

10) $x\,dx = y\,dy;$

11) $y' = y\cos x;$

12) $y' = 2xy;$

13) $dy + 3y\,dx = 0;$

14) $e^{y}y' = 1;$

15) $e^{x}y' = 1;$

16) $y' = \frac{1}{x} + e^{x}.$

Задание 4. Найти частные решения дифференциальных уравнений:

1) $y\,dy - x\,dx = dx,\ если\ y = 0\ при\ x = 2;$

2) $y' = \frac{1}{x} + x^{2},\ если\ y = 1 + \frac{e^{3}}{3}\ при\ x = e;$

3) $2xy' = y,\ если\ y = 6\ при\ x = 9;$

4) $\sin x\,dx = -dy,\ если\ y = 1\ при\ x = \pi/3;$

5) $3y^{2}y' = y^{3} + 1,\ если\ y = 2\ при\ x = 0;$

6) $y' = e^{x} + 2e^{-x},\ если\ y = 3\ при\ x = 0;$

7) $(x+1)dy = y\,dx,\ если\ y = 8\ при\ x = 1.$

Задание 5. Составив дифференциальные уравнения, решить задачи:

1. Тело движется прямолинейно с ускорением а = 5 см/с^2. Начальная скорость тела v_o = 2 м/с. Вывести закон движения этого тела и вычислить путь, который оно пройдет за первые 10 мин движения.

2. Найти зависимость потенциальной энергии сжатой пружины от величины деформации.

Указание. Потенциальная энергия сжатой пружины равна работе силы F = Rx на пути от 0 до x.

3. Скорость охлаждения тела пропорциональна разности температур тела и окружающей среды. До какой температуры охладится тело за 30 мин, если за 10 мин оно охладилось от 100 до 60° С? Температура окружающей среды 20° С.

4. Уменьшение интенсивности света при прохождении через поглощающее вещество пропорционально интенсивности падающего света и толщине поглощающего слоя. Найти закон убывания интенсивности света, если известно, что при прохождении слоя l = 0,5 м интенсивность света убывает в два раза.

5. Найти закон убывания лекарственного препарата в организме человека, если через 1 ч после введения 10 мг препарата масса его уменьшилась вдвое. Какое количество препарата останется в организме через 2 ч?

6. Составить дифференциальное уравнение, описывающее движение математического маятника, считая, что углы отклонения маятника малы.

Форма отчета: решение задач, защита

Практическое задание№ 5

Тема: Решение дифференциальных уравнений с разделяющимися

Цель: научиться решать дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными

Оборудование: тетрадь, ручка

Методические указания: выполните задания

Ход выполнения:

Задание 1. Найти общее решение дифференциального уравнения к разделяющимися переменными.

1) $xy' - y = 0$

2) $xy' + y = 0$
3) $yy' + x = 0$
4) $x^2y' + y = 0$
5) $y' = y$
6) $x^2y' + y = 0$

Задание 2. Найти частное решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.

1) $tg\, x * y' = 1 + y, \quad если\; x = \frac{П}{6}; y = -\frac{1}{2}$
2) $(1 - x^2)\frac{dx}{dy} + xy = 0, если\; x = 0, y = 4$
3) $dy + y\, dyx\, dx = 0, если\; x = 0, y = 1$
4) $\frac{2x - 1}{y + 1} = \frac{dx}{dy}\;, если\; x = 5; y = 0$
5) $(1 + y)dx - (1 - x) = 0, если\; x = 0, y = 1$
6) $2y' = y, если\; x = 0; y = 1$

Форма отчета: решение задачи, защита

Практическое задание№ 6

Тема: Решение дифференциальных уравнений первого и второго порядка
Цель: научиться решать дифференциальных уравнений первого и второго порядка
Оборудование: тетрадь, ручка
Методические указания: выполните задания
Ход выполнения:
Задание. Решить задания своего варианта

вариант	Первая буква фамилии
1	А, Ё, Л, С,Ш
2	Б, Ж, М, Т,Щ
3	В, З, Н, У,Э
4	Г, И, О,Ф,Ю
5	Д, Й, П,Х,Я
6	Е, К, Р,Ч,Ы

Вариант 1

1.Найти решение однородного дифференциального уравнения первого порядка.
$yy' = 2y - x$

2. Найти общее решение дифференциального уравнения 2-го порядка.
$y'' - 4y' + 13y = 0$

3. Найти частное решение дифференциального уравнения 2-го порядка.
$y'' + y' - 2y = 0$
$если\;\; x = 0; y = 1;\; y' = 3$

Вариант 2

1.Найти решение однородного дифференциального уравнения первого порядка.
$x^2 + y^2 - 2xy * y' = 0$
2. Найти общее решение дифференциального уравнения 2-го порядка.
$y'' - 4y' + 4y = 0$
3. Найти частное решение дифференциального уравнения 2-го порядка.
$y'' + 4y' - 5y = 0$
$если\ x = 0; y = 4;\ y' = 2$
Вариант 3
1.Найти решение однородного дифференциального уравнения первого порядка.
$x^2y' = y^2 + xy$
2. Найти общее решение дифференциального уравнения 2-го порядка.
$y'' - 4y = 0$
3. Найти частное решение дифференциального уравнения 2-го порядка.
$y'' - 4y' = 0, x = 0; y = 2;\ y' = 8$
Вариант 4
1.Найти решение однородного дифференциального уравнения первого порядка.
$x^2y^2y' + yx^3 = 1$
2. Найти общее решение дифференциального уравнения 2-го порядка.
$y'' + 3y' - 4y = 0$
3. Найти частное решение дифференциального уравнения 2-го порядка.
$y'' - 2y' + y = 0, x = 0; y = 3;\ y' = 7$
Вариант 5
1.Найти решение однородного дифференциального уравнения первого порядка.
$xy^2dy = (x^3 + y^3)dx$
2. Найти общее решение дифференциального уравнения 2-го порядка.
$y'' + 4y' = 0$
3. Найти частное решение дифференциального уравнения 2-го порядка.
$y'' + 3y' + 2y = 0, x = 0; y = 1;\ y' = 4$
Вариант 6
1.Найти решение однородного дифференциального уравнения первого порядка.
$(x^2 - 2y^2)dx + 2xy\,dy = 0$
2. Найти общее решение дифференциального уравнения 2-го порядка.
$y'' + 4y = 0$
3. Найти частное решение дифференциального уравнения 2-го порядка.
$y'' - 2y' = 0, x = 0; y = 2;\ y' = 6$
Форма отчета: решения задач, защита

Практическое задание№ 7

Тема: Определение сходимости числовых и функциональных рядов
Цель: научиться определять сходимость числовых и функциональных рядов.
Оборудование: тетрадь, ручка
Методические указания: выполните задания

Ход выполнения:

Задание 1. Изучите теоретические сведения представленные ниже

В общем виде **положительный числовой ряд** можно записать так: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Здесь:

$\sum$ – математический значок суммы;

a_n – **общий член ряда** (запомните этот простой термин);

n – переменная-«счётчик». Запись $\sum_{n=1}^{\infty}$ обозначает, что проводится суммирование от 1 до «плюс бесконечности», то есть, сначала у нас $n=1$, затем $n=2$, потом $n=3$, и так далее – до бесконечности. Вместо переменной n иногда используется переменная k или m. Суммирование не обязательно начинается с единицы, в ряде случаев оно может начинаться с нуля $\sum_{n=0}^{\infty}$, с двойки $\sum_{n=2}^{\infty}$ либо с любого *натурального числа*.

В соответствии с переменной-«счётчиком» любой ряд можно расписать развёрнуто:

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \dots$ – и так далее, до бесконечности.

Будем считать, что **ВСЕ** слагаемые $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots$ – это **неотрицательные ЧИСЛА**.

<u>Пример 1</u>

Записать первые три члена ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)$

Это уже, кстати, «боевое» задание – на практике довольно часто требуется записать несколько членов ряда.

Сначала $n=1$, тогда: $2 \cdot 1 + 1 = 3$

Затем $n=2$, тогда: $2 \cdot 2 + 1 = 5$

Потом $n=3$, тогда: $2 \cdot 3 + 1 = 7$

Процесс можно продолжить до бесконечности, но по условию требовалось написать первые три члена ряда, поэтому записываем ответ: $\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1) = 3 + 5 + 7 + \dots$

Обратите внимание на принципиальное отличие от <u>числовой последовательности</u>, в которой члены не суммируются, а рассматриваются как таковые.

Одной из ключевых задач теории числовых рядов является **исследование ряда на сходимость**. При этом возможны два случая:

1) **Ряд** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **расходится**. Это значит, что бесконечная сумма равна бесконечности: $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \dots = \infty$ либо суммы вообще *не существует*, как,

например, у ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n = -1+1-1+1-1+\dots$.

2) **Ряд** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **сходится**. Это значит, что бесконечная сумма равна некоторому *конечному* *числу* S: $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+\dots=S$.

Пожалуйста: $\sum_{n=1}^{\infty} 0^n = 0+0+0+\dots=0$ – этот ряд сходится и его сумма равна нулю.

Задание 2. Решить следующие задачи:

1. Записать первые три члена ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{(4n-3)\cdot 5^n}$
2. Записать сумму в свёрнутом виде с общим членом ряда $\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{3}{27}+\frac{4}{81}+\dots$
3. Записать сумму в свёрнутом виде с общим членом ряда $\frac{2}{\sqrt[5]{7}}+\frac{4}{\sqrt[5]{14}}+\frac{8}{\sqrt[5]{21}}+\dots$

Выполнить проверку, снова записав ряд в развернутом виде

4. Исследовать ряд на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{7n+3}$
5. Записать первые три члена ряда $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}$

Форма отчета: решение задач, защита

Практическое задание№ 8

Тема: Разложение элементарных функций в ряд Маклорена.

Цель: научиться разложению элементарных функций в ряд Маклорена.

Оборудование: тетрадь, ручка

Методические указания: выполните задания

Ход выполнения:

Задание 1. Записать таблицу разложение в ряд Маклорена элементарных функций

Разложение	Область сходимости
$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$	$x \in R$
$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots$	$x \in R$
$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$	$x \in R$
$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots$	$x \in (-1,1]$
$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \ldots$	$x \in [-1,1]$, если $m \geq 0$; $x \in (-1,1]$, если $-1 < m < 0$; $x \in (-1,1)$, если $m \leq -1$
$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots$	$x \in [-1,1]$
$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots$	$x \in (-1,1)$

Задание 2. Рассмотреть и записать пример нахождения ряд Маклорена функции $y(x) = \cos^2 x$.

Применим к заданной функции формулу понижения степени, то есть представим ее в следующем виде:

$$y(x) = \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\cos 2x$$

Ряд для функции $\cos t$ имеет вид:

$$\cos t = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!}$$

Заменяя в последнем равенстве t на $2x$, получаем, что

$$\cos 2x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n (2x)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n} x^{2n}}{(2n)!}$$

А тогда

$$y(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\cos 2x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n} x^{2n}}{(2n)!} =$$

$$= \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!}$$

Ответ. $y(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!}$

Форма отчета: решение задачи, защита

Практическое задание№ 9

Тема: Вычисление интегралов и производных по формулам Симпсона и Ньютона

Цель: научиться вычислять интегралы и производные по формулам Симпсона и Ньютона.

Оборудование: тетрадь, ручка

Методические указания: выполните задания

Ход выполнения:

Задание 1. Вычислите определенные интегралы элементарных функций:

1. $\int_1^4 (x-8)dx$;
2. $\int_1^3 (x-\sqrt{x})dx$;
3. $\int_1^4 \frac{8}{x^4} dx$;

1. $\int_1^2 \left(\frac{1}{2}x+3\right)^4 dx$;
2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\cos x + 2\sin x)dx$
3. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{5}{\cos^2 x} dx$.

Задание 2. Воспользовавшись методом непосредственного интегрирования найти следующие определенные интегралы:

1. $\int_1^3 \frac{(2x+1)^2}{2x^2} dx$;
2. $\int_1^3 \frac{(x-2)^2}{x} dx$.

Форма отчета: решение задач, защита

Практическое задание№ 9

Тема: Вычисление интегралов и производных по формулам Симпсона и Ньютона

Цель: проверить умения нахождения производной функции.

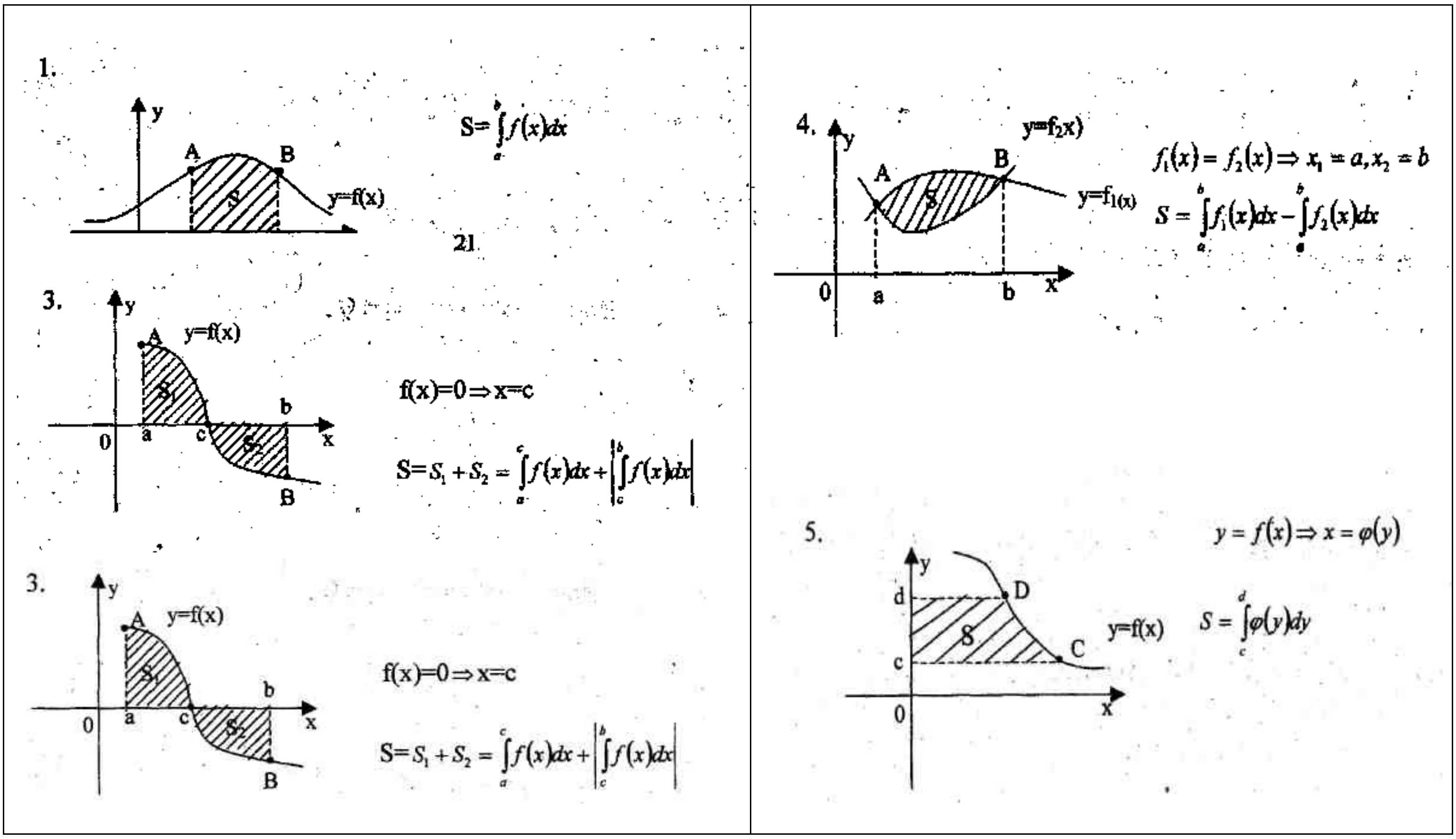
Оборудование: тетрадь, ручка

Методические указания: выполните задания

Ход выполнения:

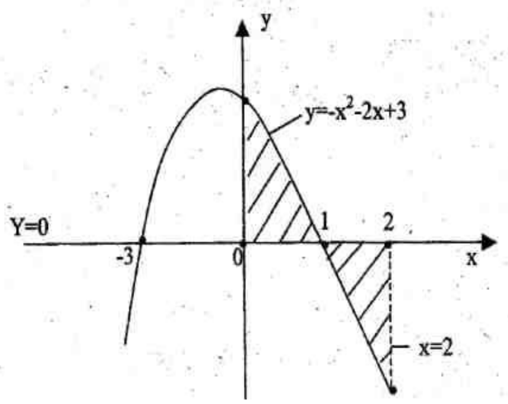
Задание 1. Изучить теоретический материал.

Площадь криволинейной трапеции, ограниченной непрерывной кривой *y=f(x)*, двумя прямыми *x=a* и *x=b* и осью абсцисс, вычисляется с помощью определенного интеграла по формулам:



Пример 4: вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=-x^2-2x+3$, осями координат и прямой *x=2*.

Решение: построим данные линии



Найдем точки пересечения графика функции с осью Ox: $y=-x^2-2x+3$, $-x^2-2x+3=0$, $x_1=1$, $x_2=-3$

$$S=\int_0^1(-x^2-2x+3)dx-\int_1^2(-x^2-2x+3)dx=(-\frac{x^3}{3}-x^2+3x)\Big|_0^1+(-\frac{x^3}{3}-x^2+3x)\Big|_1^2=$$

$$=-\frac{1}{3}-1+3-(-\frac{8}{3}-4+6)+(-\frac{1}{3}-1+3)=\frac{5}{3}+\frac{2}{3}+\frac{5}{3}=\frac{12}{3}=4(\textit{кв.ед.})$$

Приближенное вычисление определенных интегралов

При решении физических и технических задач приходится находить определенные интегралы от функций, первообразные которых не выражаются через элементарные функции. Это привело к необходимости вывода приближенных формул вычисления определенных интегралов. Познакомимся с двумя из них: *формулой трапеций и формулой парабол.*

$$\int_a^b f(x)dx\approx\frac{f(x_0)+f(x_1)}{2}(x_1-x_2)+\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}(x_2-x_1)+\ldots+\frac{f(x_{n-1})+f(x_n)}{2}(x_n-x_{n-1})=$$

$$=\frac{b-a}{2n}\left\{f(a)+f(b)+2\sum_{k-1}^{n-1}f(x_k)\right\},$$

1. Формула трапеций.

Пусть требуется вычислить интеграл $\int_a^b f(x)dx$, где f(x) - непрерывная функция. Для простоты рассуждений ограничимся случаем, когда $f(x)^{3}0$. Разобьем отрезок [a, b] на n отрезков точками $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{k-1}<x_k<\ldots<x_n=b$ и с помощью прямых $x=x_k$ построим n прямолинейных трапеций (эти трапеции заштрихованы на рис. 1). Сумма площадей трапеций приближенно равна площади криволинейной трапеции, т.е.

Где $f(x_{k-1})$ и $f(x_k)$ - соответственно основания трапеций; $x_k - x_{k-1} = (b-a)/n$ - их высоты.

Таким образом, получена приближенная формула

6 $$\int_a^b f(x)dx\approx\frac{b-a}{2n}\left\{f(a)+f(b)+2\sum_{k-1}^{n-1}f(x_k)\right\},$$

которая и называется *формулой трапеций.* Эта формула тем точнее, чем больше n.

Рассмотрим в качестве примера интеграл $\int_0^1 x^2dx$. Точное значение этого интеграла находится просто:

$$\int_0^1 x^2dx=\frac{x^3}{3}\Big|_0^1=\frac{1}{3}=0{,}3333\ldots$$

Задание 2. Д-2. Григорьев В.П. Элементы высшей математики: учебник для студ.учреждений сред. проф. образования/ В.П. Григорьев, Ю.А. Дубинский. – 4-е изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия», 2008. – стр. 148, задачи 4,5,8(1) , 10

Задание 3. Вычислить по формуле трапеции интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ при n=10.

Задание 4.

Вычислить приближенно интеграл по формулам прямоугольников, трапеций, Симпсона и оценить их погрешности: $\int^6 \frac{dx}{\ln x}$.

Форма отчета: решение задач с учебника, защита

Практическое задание№10

Тема: Решение задач на тему Основы теории вероятности и математической статистики

Цель: научиться решать задачи по теме

Оборудование: тетрадь, ручка

Методические указания: выполните задания

Ход выполнения:

Задание 1. Изучить теоретические сведения

Классическое определение вероятности

Вероятностью события А называется отношение числа благоприятных для А исходов к числу всех равновозможных исходов: **Р (А)** = $\frac{m}{n}$

где *n* — общее число равновозможных исходов, *m* — число исходов, благоприятствующих событию А.

Противоположные события

Событие, противоположное событию А, обозначают Ā. При проведении испытания всегда происходит ровно одно из двух противоположных событий и

Объединение несовместных событий

Два события А и В называют несовместными, если отсутствуют исходы, благоприятствующие одновременно как событию А, так и событию В.

Если события А и В несовместны, то вероятность их объединения равна сумме вероятностей событий А и В: **P(A U B) =P(A) + P(B)**

Пересечение независимых событий

Два события А и В называют независимыми, если вероятность каждого из них не зависит от появления или непоявления другого события.

Событие С называют пересечением событий А и В (пишут С = А∩В), если событие С означает, что произошли оба события А и В. Если события А и В независимы, то вероятность их пересечения равна произведению вероятностей событий А и В:

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Формула сложения вероятностей совместных событий:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Задание 2. Решить задачи:

Задача 1. Перед началом матча по футболу судья бросает монету, чтобы определить, какая из команд будет первой владеть мячом. Команда «Байкал» играет по очереди с командами «Амур», «Енисей», «Иртыш». Найти вероятность того, что команда «Байкал» будет первой владеть мячом только в игре с «Амуром».

Задача 2. Стрелок 4 раза стреляет по мишеням. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,5. Найдите вероятность того, что стрелок первые 3 раза попал в мишени, а последний раз промахнулся.

Задача 3. Перед началом футбольного матча судья бросает монетку, чтобы определить, какая из команд будет первой владеть мячом. Команда *A* должна сыграть два матча — с командой *B* и с командой *C*. Найдите вероятность того, что в обоих матчах первой мячом будет владеть команда *A*.

Задача 4. Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна, равна 0,02. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля. Вероятность того, что система забракует неисправную батарейку, равна 0,99. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,01. Найдите вероятность того, что случайно выбранная батарейка будет забракована системой контроля.

Задача 5. Всем пациентам с подозрением на гепатит делают анализ крови. Если анализ выявляет гепатит, то результат анализа называется *положительным*. У больных гепатитом пациентов анализ даёт положительный результат с вероятностью 0,9. Если пациент не болен гепатитом, то анализ может дать ложный положительный результат с вероятностью 0,01. Известно, что 5% пациентов, поступающих с подозрением на гепатит, действительно больны гепатитом. Найдите вероятность того, что результат анализа у пациента, поступившего в клинику с подозрением на гепатит, будет положительным.

Задача 6. Стрелок стреляет по мишени один раз. В случае промаха стрелок делает второй выстрел по той же мишени. Вероятность попасть в мишень при одном выстреле равна 0,7. Найдите вероятность того, что мишень будет поражена (либо первым, либо вторым выстрелом).

Задача 7. По отзывам покупателей Иван Иванович оценил надёжность двух интернет-магазинов. Вероятность того, что нужный товар доставят из магазина А, равна 0,8. Вероятность того, что этот товар доставят из магазина Б, равна 0,9. Иван Иванович заказал товар сразу в обоих магазинах. Считая, что интернет-магазины работают независимо друг от друга, найдите вероятность того, что ни один магазин не доставит товар.

Задача 8. Две фабрики выпускают одинаковые стекла для автомобильных фар. Первая фабрика выпускает 45% этих стекол, вторая — 55%. Первая фабрика выпускает

3% бракованных стекол, а вторая — 1%. Найдите вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным.

Задача 9. Вероятность того, что новый электрический чайник прослужит больше года, равна 0,97. Вероятность того, что он прослужит больше двух лет, равна 0,89. Найдите вероятность того, что он прослужит меньше двух лет, но больше года.

Задача 10. На экзамене по геометрии школьнику достаётся один вопрос из списка экзаменационных вопросов. Вероятность того, что это вопрос на тему «Вписанная окружность», равна 0,2. Вероятность того, что это вопрос на тему «Параллелограмм», равна 0,15. Вопросов, которые одновременно относятся к этим двум темам, нет. Найдите вероятность того, что на экзамене школьнику достанется вопрос по одной из этих двух тем.

Форма отчета: решение задач в тетради.

4. ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИ

4.1Основные электронные издания:

О-1. Григорьев В.П. Математика: учебное издание / В.П. Григорьев, Т.Н. Сабурова. - Москва : Академия, 2024. - 368 с. (Специальности среднего профессионального образования). - URL: https://academia-moscow.ru/reader/?id=750150/. - Режим доступа: Электронная библиотека «Academia-library». - Текст: электронный.

4.2. Дополнительные источники:

Д-1. Башмаков, М.И. Математика: учебник для студ. учреждений сред. проф. образования / М.И. Башмаков. – 10-е изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия», 2015. – 256 с.

Д-2. Башмаков, М.И. Математика. Задачник: учеб. пособие для студ. учреждений сред. проф. образования / М.И. Башмаков. – 5-е изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия», 2014. – 416 с.

Д-3. Башмаков, М.И. Математика. Книга для преподавателя: методическое пособие/ М.И. Башмаков.- М.:ИЦ Академия, 2014. – 224с.

Д-4. Дадаян, А.А. Математика: учебник / А.А. Дадаян.-М.: ФОРУМ: ИНФРА-М, 2007.-544 с.

Д-5. Дадаян, А.А. Сборник задач по математике: учебное пособие / А.А. Дадаян.-М.: ФОРУМ: ИНФРА-М, 2013.-352 с.

Д-6. Богомолов, Н.В. Практические занятия по математике: учебное пособие/ Н.В. Богомолов. - М.: Высшая школа, 2000. – 495с.

ЛИСТ ИЗМЕНЕНИЙ И ДОПОЛНЕНИЙ, ВНЕСЕННЫХ В МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

<table>
<tr><td colspan="2">№ изменения, дата внесения, № страницы с изменением</td></tr>
<tr><td>Было</td><td>Стало</td></tr>
<tr><td colspan="2">Основание:

Подпись лица, внесшего изменения</td></tr>
</table>