ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ИРКУТСКОЙ ОБЛАСТИ «ЧЕРЕМХОВСКИЙ ГОРНОТЕХНИЧЕСКИЙ КОЛЛЕДЖ ИМ. М.И. ЩАДОВА»

РАССМОТРЕНО
на заседании ЦК
«Информатики и ВТ»
«31» июнь 2022 г.
Протокол № 10
Председатель: Окладникова Т.В.

УТВЕРЖДАЮ
И.о. зам. директора по УР
О.В. Папанова
«15» июнь 2022 г.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

для выполнения
практических (лабораторных) работ студентов 2 курса
по

УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

ЕН. 01 МАТЕМАТИКИ

программы подготовки специалистов среднего звена

21.02.15 Открытые горные работы

Разработал
преподаватель:
Окладникова Т.В.

2022 г.

СОДЕРЖАНИЕ

1.ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Методические указания по выполнению практических (лабораторных) работ по учебной дисциплине **«Математика»** предназначены для студентов специальности **21.02.15 Открытые горные работы,** составлены в соответствии с рабочей программой дисциплины «М**атематика**» с учетом рекомендаций **требований Мин. обр. (**помещение кабинета учебной дисциплины «**Математики**» должны удовлетворять требованиям санитарно-эпидемиологических правил и нормативов (СанПиН 2.4.2 № 178-02), и оснащено типовым оборудованием, указанным в настоящих требованиях, в том числе специализированной учебной мебелью и средствами обучения, достаточными для выполнения требований к уровню подготовки студентов[1]) и направлены на достижение следующих целей:

– формирование у студентов представлений о роли элементах высшей математики в современном обществе;

– формирование у студентов умений осуществлять поиск и использование информации, необходимой для эффективного выполнения профессиональных задач, профессионального и личностного развития;

– приобретение студентами опыта использования элементов высшей математики в индивидуальной и коллективной учебной и познавательной деятельности;

Методические указания являются частью учебно-методического комплекса по дисциплине «**Математики**» и содержат задания, указания для выполнения практических (лабораторных) работ, теоретический минимум и т.п. Перед выполнением практической работы каждый студент обязан показать свою готовность к выполнению работы:

- ответить на теоретические вопросы преподавателя.

По окончанию работы студент оформляет отчет в тетради и защищает свою работу.

В результате выполнения полного объема практических работ студент должен **уметь:**

- выполнять операции над матрицами и решать системы линейных уравнений;
- применять методы дифференциального и интегрального исчисления;
- решать дифференциальные уравнения.

При проведении практических работ применяются следующие технологии и методы обучения:

1. проблемно-поисковых технологий
2. тестовые технологии

Правила выполнения практических работ:

---

[1] См. Письмо Минобрнауки РФ от 24 ноября 2011 г. N МД-1552/03 «Об оснащении общеобразовательных учреждений учебным и учебно-лабораторным оборудованием»

1. Запомните порядок проведения практических работ, правила их оформления.
2. Изучите теоретические аспекты практической работы
3. Выполните задания практической работы.
4. Оформите отчет в тетради.

Требования к рабочему месту:

- посадочные места по количеству студентов,
- рабочее место преподавателя,
- дидактическое обеспечение дисциплины:
- сборник практических работ
- сборник заданий для самостоятельной работы студентов
- таблицы, чертежные инструменты.

Технические средства обучения:

- Интерактивная доска, компьютер, диапроектор.

Критерии оценки:

Оценки «5» (отлично) заслуживает студент, обнаруживший при выполнении заданий всестороннее, систематическое и глубокое знание учебно - программного материала, учения свободно выполнять профессиональные задачи с всесторонним творческим подходом, обнаруживший познания с использованием основной и дополнительной литературы, рекомендованной программой, усвоивший взаимосвязь изучаемых и изученных дисциплин в их значении для приобретаемой специальности, проявивший творческие способности в понимании, изложении и использовании учебно- программного материала, проявивший высокий профессионализм, индивидуальность в решении поставленной перед собой задачи, проявивший неординарность при выполнении практического задания.

Оценки «4» (хорошо) заслуживает студент, обнаруживший при выполнении заданий полное знание учебно- программного материала, успешно выполняющий профессиональную задачу или проблемную ситуацию, усвоивший основную литературу, рекомендованную в программе, показавший систематический характер знаний, умений и навыков при выполнении теоретических и практических заданий по дисциплине «Математика».

Оценки «3» (удовлетворительно) заслуживает студент, обнаруживший при выполнении практических и теоретических заданий знания основного учебно-программного материала в объеме, необходимом для дальнейшей учебной и профессиональной деятельности, справляющийся с выполнением заданий, предусмотренных программой, допустивший погрешности в ответе при защите и выполнении теоретических и практических заданий, но обладающий необходимыми знаниями для их устранения под руководством преподавателя, проявивший какую-то долю творчества и индивидуальность в решении поставленных задач.

Оценки «2» (неудовлетворительно) заслуживает студент, обнаруживший при выполнении практических и теоретических заданий проблемы в знаниях основного учебного материала, допустивший основные принципиальные ошибки в выполнении задания или ситуативной задачи, которую он желал бы решить или предложить варианты решения, который не проявил творческого подхода, индивидуальности.

В соответствии с учебным планом программы подготовки специалистов среднего звена по специальности **21.02.15 Открытые горные работы** и рабочей программой на практические (лабораторные) работы по дисциплине «**Математики**» отводится 6 часов.

2. ПЕРЕЧЕНЬ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

№ п/п	Название практической работы	Количество часов
1	**Практическое занятие №1** Вычисление производных и определенных интегралов	2
2	**Практическая работа №2** Вычисление неопределенных интегралов	2
3	**Практическое занятие №3** Решение дифференциальных уравнений на простейших задачах.	2
	Итого	**6 часов**

3. СОДЕРЖАНИЕ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

Практическая работа № 1

Вычисление производных и определенных интегралов

Цель: закрепить знанию в области решения производных

Задание 1. Изучить теоретические сведения к практической работе

Таблица производных основных элементарных функций:

1. $(c)' = 0, (cu)' = cu';$
2. $x' = 1$
3. $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' \quad (n \in R)$
4. $(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$
5. $(\frac{1}{u^n})' = -\frac{n}{u^{n+1}} \cdot u'$

12. $(\log_a u)' = \frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$
13. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$
14. $(\cos u)' = \sin u \cdot u'$
15. $(tgu)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$
16. $(ctgu)' = \frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$

6. $(u+v)'=u'+v'$;

7. $(uv)'=u'v+v'u$;

8. $(\frac{u}{v})'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$

9. $(e^u)'=e^u\cdot u'$

10. $(a^u)'=a^u\cdot\ln a\cdot u'$

11. $(\ln u)'=\frac{1}{u}\cdot u'$

17. $(\arcsin u)'=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$

18. $(\arccos u)'=-\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$

19. $(arctgu)'=\frac{1}{1+u^2}\cdot u'$

20. $(arcctgu)'=-\frac{1}{1+u^2}\cdot u'$

Задание 2. Найти производные заданных функций

1) $y=x^2\cdot\ln x$; 2) $y=arctge^x$; 3) $y=\sin^2 tgx$, 4) $y=\frac{3x+1}{e^x}$;

5) $y=\left(x^3+1\right)\cdot\cos x$, 6) $y=x^2e^{x^2+3x}$, 7) $y=\frac{3\cos x}{2x+1}$, 8) $y=2x^3+3\sin^2 5x$;

9) $y=x^2\cdot tgx$, 10) $y=\frac{\log_5 x}{5^x}$; 11) $y=\sin x\cdot\ln x$; 12) $y=Sin\sqrt{1-x^2}$;

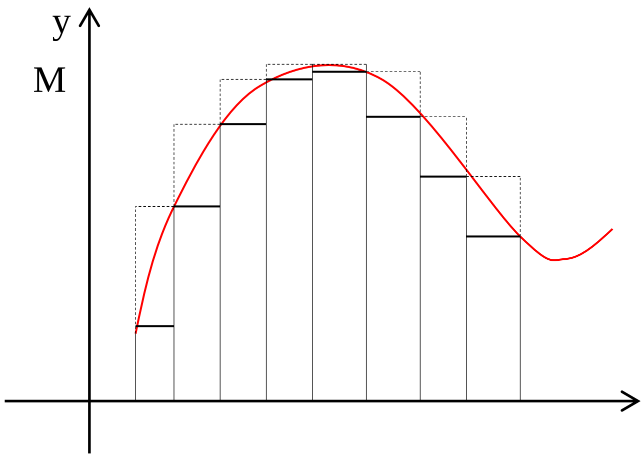
13) $y=\frac{6^x}{\cos x}$; 14) $y=\ln\left(1+\sqrt{x}\right)$; 15) $y=\frac{1}{x^4}-\frac{1}{x^8}$; 16) $y=x^2\cdot arctgx^2$;

17) $y=\frac{\arcsin x}{x^2}$, 18) $f(x)=\frac{\ln x}{x-1}$; 19) $y=e^x\cdot tgx$ 20) $y=\ln\sin 5x$

Задание 3. Изучите теоретические сведения

Таблица интегралов

1. $\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C, (n\neq -1)$	7. $\int\frac{dx}{\sin^2 x}=ctgx+C$	13. $\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}arctgx+C$
2. $\int dx=x+C$	8. $\int tgxdx=\ln\lvert\cos x\rvert+C$	14. $\int\frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{a+x}{a-x}\right\rvert+C$
3. $\int\frac{dx}{x}=\ln x+C$	9. $\int ctgxdx=\ln\lvert\sin x\rvert+C$	15. $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C$
4. $\int\sin xdx=-\cos xdx$	10. $\int e^x dx=e^x+C$	16. $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C$
5. $\int\cos xdx=\sin xdx$	11. $\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$	
6. $\int\frac{dx}{\cos^2 x}=tgx+C$	12. $\int\frac{dx}{1+x^2}=arctgx+C$	



m

0 a x_i b x

Обозначим m и M наименьшее и наибольшее значение функции на отрезке [a, b]

Разобьем отрезок [a, b] на части (не обязательно одинаковые) n точками.

$$x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n$$

Тогда $x_1 - x_0 = \Delta x_1$, $x_2 - x_1 = \Delta x_2$, … ,$x_n - x_{n-1} = \Delta x_n$;

На каждом из полученных отрезков найдем наименьшее и наибольшее значение функции.

$[x_0, x_1] \to m_1, M_1$; $[x_1, x_2] \to m_2, M_2$; … $[x_{n-1}, x_n] \to m_n, M_n$.

Составим суммы:

$$\underline{S}_n = m_1\Delta x_1 + m_2\Delta x_2 + \ldots + m_n\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$$

$$\overline{S}_n = M_1\Delta x_1 + M_2\Delta x_2 + \ldots + M_n\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$$

Сумма $\underline{S}$ называется **нижней интегральной суммой**, а сумма $\overline{S}$ – **верхней интегральной суммой**.

Т.к. $m_i \le M_i$, то $\underline{S}_n \le \overline{S}_n$,   а $m(b - a) \le \underline{S}_n \le \overline{S}_n \le M(b - a)$

Внутри каждого отрезка выберем некоторую точку ε.

$$x_0 < \varepsilon_1 < x_1, \quad x_1 < \varepsilon < x_2, \ \ldots \ , x_{n-1} < \varepsilon < x_n.$$

Найдем значения функции в этих точках и составим выражение, которое называется **интегральной суммой** для функции f(x) на отрезке [a, b].

$$S_n = f(\varepsilon_1)\Delta x_1 + f(\varepsilon_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\varepsilon_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i$$

Тогда можно записать: $m_i\Delta x_i \le f(\varepsilon_i)\Delta x_i \le M_i\Delta x_i$

Следовательно, $\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$

$$\underline{S_n} \le S_n \le \overline{S_n}$$

Геометрически это представляется следующим образом: график функции f(x) ограничен сверху описанной ломаной линией, а снизу – вписанной ломаной.

Обозначим $max\Delta x_i$ – наибольший отрезок разбиения, а $min\Delta x_i$ – наименьший. Если $max\Delta x_i \to 0$, то число отрезков разбиения отрезка [a, b] стремится к бесконечности.

Если $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i$, то $\lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i = S.$

<u>Определение:</u> Если при любых разбиениях отрезка [a, b] таких, что $max\Delta x_i \to 0$ и произвольном выборе точек ε_i интегральная сумма $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i$ стремится к пределу S, который называется определенным интегралом от f(x) на отрезке [a, b].

Обозначение : $\int_a^b f(x)dx.$

a – нижний предел, b – верхний предел, x – переменная интегрирования, [a, b] – отрезок интегрирования.

<u>Определение:</u> Если для функции f(x) существует предел $\lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx,$ то функция называется **интегрируемой** на отрезке [a, b].

Также верны утверждения: $\lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$$

<u>Теорема:</u> Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b], то она интегрируема на этом отрезке.

<u>Свойства определенного интеграла.</u>

1) $\int_a^b Af(x)dx = A\int_a^b f(x)dx;$
2) $\int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx$
3) $\int_a^a f(x)dx = 0$

4) Если f(x) ≤ φ(x) на отрезке [a, b] a < b, то $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b \varphi(x)dx$

5) Если m и M – соответственно наименьшее и наибольшее значения функции f(x) на отрезке [a, b], то:

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

6) **Теорема о среднем.** Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b], то на этом отрезке существует точка ε такая, что

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\varepsilon)$$

Доказательство: В соответствии со свойством 5:

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M$$

т.к. функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b], то она принимает на этом отрезке все значения от m до M. Другими словами, существует такое число ε∈ [a, b], что если $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \mu$ и μ = f(ε), а a ≤ ε ≤ b, тогда $\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\varepsilon)$. Теорема доказана.

7) Для произвольных чисел a, b, c справедливо равенство:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Разумеется, это равенство выполняется, если существует каждый из входящих в него интегралов.

8) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

Обобщенная теорема о среднем. Если функции f(x) и φ(x) непрерывны на отрезке [a, b], и функция φ(x) знакопостоянна на нем, то на этом отрезке существует точка ε, такая, что

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = f(\varepsilon)\int_a^b \varphi(x)dx$$

Теорема Ньютона-Лейбница.

Пусть в интеграле $\int_a^b f(x)dx$ нижний предел a = const, а верхний предел b изменяется. Очевидно, что если изменяется верхний предел, то изменяется и значение интеграа.

Обозначим $\int\limits_a^x f(t)dt = Ф(x)$. Найдем производную функции Ф(x) по переменному верхнему пределу x.

$$\frac{d}{dx}\int\limits_a^x f(t)dt = f(x)$$

Аналогичную теорему можно доказать для случая переменного нижнего предела.

<u>Теорема:</u> Для всякой функции f(x), непрерывной на отрезке [a, b], существует на этом отрезке первообразная, а значит, существует неопределенный интеграл.

<u>Теорема:</u> (Теорема Ньютона – Лейбница)

Если функция F(x) – какая- либо первообразная от непрерывной функции f(x), то $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

это выражение известно под названием формулы Ньютона – Лейбница.

<u>Доказательство:</u> Пусть F(x) – первообразная функции f(x). Тогда в соответствии с приведенной выше теоремой, функция $\int\limits_a^x f(t)dt$ - первообразная функция от f(x). Но т.к. функция может иметь бесконечно много первообразных, которые будут отличаться друг от друга только на какое – то постоянное число С, то

$$\int\limits_a^x f(t)dt = F(x) + C$$

при соответствующем выборе С это равенство справедливо для любого х, т.е. при х = а:

$$\int\limits_a^a f(t)dt = F(a) + C$$

$$0 = F(a) + C$$

$$C = -F(a)$$

Тогда $\int\limits_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$.

А при х = b: $\int\limits_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$

Заменив переменную t на переменную х, получаем формулу Ньютона – Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Теорема доказана.

Иногда применяют обозначение $F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$.

Формула Ньютона – Лейбница представляет собой общий подход к нахождению определенных интегралов.

Что касается приемов вычисления определенных интегралов, то они практически ничем не отличаются от всех тех приемов и методов, которые были рассмотрены выше при нахождении неопределенных интегралов.

Точно так же применяются методы подстановки (замены переменной), метод интегрирования по частям, те же приемы нахождения первообразных для тригонометрических, иррациональных и трансцендентных функций. Особенностью является только то, что при применении этих приемов надо распространять преобразование не только на подинтегральную функцию, но и на пределы интегрирования. Заменяя переменную интегрирования, не забыть изменить соответственно пределы интегрирования.

Пусть задан интеграл $\int_a^b f(x)dx$, где f(x) – непрерывная функция на отрезке [a, b].

Введем новую переменную в соответствии с формулой $x = \varphi(t)$.

Тогда если

1) $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$

2) $\varphi(t)$ и $\varphi'(t)$ непрерывны на отрезке $[\alpha, \beta]$

3) $f(\varphi(t))$ определена на отрезке $[\alpha, \beta]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

Тогда $\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = F[\varphi(t)]\Big|_\alpha^\beta = F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)] = F(b) - F(a)$

<u>Пример.</u>

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \left\{\begin{matrix} x = \sin t; \\ \alpha = 0; \beta = \pi/2 \end{matrix}\right\} = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2t)dt =$$
$$= \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\sin\pi = \frac{\pi}{4}.$$

При замене переменной в определенном интеграле следует помнить о том, что вводимая функция (в рассмотренном примере это функция sin) должна быть непрерывна на отрезке интегрирования. В противном случае формальное применение формулы приводит к абсурду.

Пример.

$\int_0^{\pi} dx = x\Big|_0^{\pi} = \pi$, с другой стороны, если применить тригонометрическую подстановку,

$$\int_0^{\pi} dx = \int_0^{\pi} \frac{dx}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \int_0^{\pi} \frac{dx}{\cos^2 x(1 + tg^2 x)} = \{tgx = t\} = \int_0^{0} \frac{dt}{1+t^2} = 0$$

Т.е. два способа нахождения интеграла дают различные результаты. Это произошло из-за того, что не был учтен тот факт, что введенная переменная tgx имеет на отрезке интегрирования разрыв (в точке $x = \pi/2$). Поэтому в данном случае такая подстановка неприменима. При замене переменной в определенном интеграле следует внимательно следить за выполнением перечисленных выше условий.

Интегрирование по частям.

Если функции $u = \varphi(x)$ и $v = \psi(x)$ непрерывны на отрезке [a, b], а также непрерывны на этом отрезке их производные, то справедлива формула интегрирования по частям:

$$\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

Вывод этой формулы абсолютно аналогичен выводу формулы интегрирования по частям для неопределенного интеграла, который был весьма подробно рассмотрен выше, поэтому здесь приводить его нет смысла.

Задание 4. Вычислить определенные интегралы:

1. $\int_0^2 (5x^3+6)\,dx$ **2.** $\int_{-1}^1 (x^3+2x)\,dx$ **3.** $\int_0^{\pi/4} \frac{4\,dx}{\cos^2 x}$ **4.** $\int_{-0,5}^{0,5} 3\,(1+z^2)\,dz$ **5.** $\int_3^6 \frac{dx}{x}$ **6.** $\int_0^1 \frac{3\,dx}{x+3}$ **7.** $\int_4^5 (4-x)^3\,dx$

8. $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \cos(2x - \frac{\pi}{6})\,dx$ **9.** $\int_0^{\pi} \cos 4x\,dx$ **10.** $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$ **11.** $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{9+x^2}$ **12.** $\int_0^{\pi/2} x\cos x\,dx$ **13.** $\int_0^1 \ln(1+x^2)\,dx$

14. $\int_0^1 x e^{-x}\,dx$ **15.** $\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{4 - x\sin x}{x}\,dx$ **16.** $\int_0^1 \frac{dx}{e^{2x}}$

Итог работы: решение задачи, защита

Практическая работа №2

Вычисление неопределенных интегралов

Цель: научиться вычислять неопределенный интегралы

Задание 1. Решить примеры используя метод интегрирования

1. $\int (2x^3 - 5x^2 + 7x - 3)dx$
2. $\int x^5 dx$
3. $\int \frac{dx}{3 - x^2}$
4. $\int \frac{2x+5}{3x^2 - 10} dx$
5. $\int \left(\frac{5}{\sqrt{x}} - \sqrt[3]{x^2} \right) dx$
6. $\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right)^2 dx$
7. $\int 2^x \cdot e^x dx$
8. $\int \frac{dx}{16x^2 + 9}$
9. $\int (x^2 + 1)(x - 2)dx$
10. $\int \frac{1 + 2x^2}{x^2(1 + x^2)} dx$
11. $\int \frac{(1 - x)^3}{x^2} dx$

Задание 2. Используя метод замены переменной решить следующие примеры

1. $\int \sin^3 5x \cos 5x dx$
2. $\int ctg(2x + 1)dx$
3. $\int x^3 \cos(x^4)dx$
4. $\int \cos x \cdot 3^{\sin x} dx$
5. $\int \sin(2 - 7x)dx$
6. $\int \frac{2x+1}{4x^2 - 1} dx$
7. $\int \frac{xdx}{x^4 + 4}$
8. $\int \frac{e^{3x} dx}{9 + e^{6x}}$
9. $\int \frac{x^3 dx}{1 + x^4}$
10. $\int \frac{\sqrt[3]{1 + \ln x}}{x}$

Итог работы: решение задач, защита

Практическая работа № 3

Решение дифференциальных уравнений на простейших задачах.

Цель: проверить на практике знание понятия дифференциального уравнения, виды дифференциальных уравнений, умение решать дифференциальные уравнения I и II –го порядков, находить общее и частное решение.

Задание 1. Изучить теоретический материал и примеры решения дифференциальных уравнений.

1. Дифференциальное уравнение первого порядка, содержит:

1) независимую переменную x;

2) зависимую переменную y (функцию);

3) первую производную функции: y'.

Решить дифференциальное уравнение – это значит, найти множество функций $y = f(x) + C$, которые удовлетворяют данному уравнению. Такое множество функций называется общим решением дифференциального уравнения.

Пример 1

Решить дифференциальное уравнение $xy' = y$

$y' = \frac{dy}{dx}$. $x \cdot \frac{dy}{dx} = y$

В рассматриваемом примере переменные легко разделяются перекидыванием множителей по правилу пропорции:

$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$

Переменные разделены. В левой части – только «игреки», в правой части – только «иксы».

Следующий этап – интегрирование дифференциального уравнения. Интегрируем обе части:

$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$

$\ln|y| = \ln|x| + C$

Решение дифференциального уравнения в неявном виде называется общим интегралом дифференциального уравнения. То есть, $\ln|y| = \ln|x| + C$ – это общий интеграл.

Вместо записи $\ln|y| = \ln|x| + C$ обычно пишут $\ln|y| = \ln|x| + \ln|C|$.

В данном случае:

$\ln|y| = \ln|Cx|$

$y = Cx$

Функция представлена в явном виде. Это и есть общее решение.

Множество функций $y = Cx$, где $C = const$ является общим решением дифференциального уравнения $xy' = y$.

Придавая константе C различные значения, можно получить бесконечно много частных решений дифференциального уравнения.

Пример 2

Найти частное решение дифференциального уравнения $y' = -2y$, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 2$

По условию требуется найти частное решение ДУ, удовлетворяющее начальному условию. Такая постановка вопроса также называется задачей Коши.

Сначала находим общее решение.

$\frac{dy}{dx} = -2y$ $\frac{dy}{y} = -2dx$

Интегрируем уравнение:

$$\int \frac{dy}{y} = -2\int dx$$

$$\ln|y| = -2x + C^*$$

$$y = e^{-2x+C^*}$$

$$y = e^{C^*} \cdot e^{-2x}$$

Итак, общее решение: $y = Ce^{-2x}$, где $C = const$. На завершающем этапе нужно найти частное решение, удовлетворяющее заданному начальному условию $y(0) = 2$.
Необходимо подобрать такое значение константы C, чтобы выполнялось заданное начальное условие $y(0) = 2$.

В общее решение вместо «икса» подставляем ноль, а вместо «игрека» двойку:

$$y(0) = Ce^{-2\cdot 0} = Ce^0 = C = 2$$

В общее решение $y = Ce^{-2x}$ подставляем найденное значение константы $C = 2$:

$y = 2e^{-2x}$ – это и есть нужное нам частное решение.

Пример 3

Решить дифференциальное уравнение $y' + (2y+1)ctgx = 0$

Решение: Переписываем производную в нужном нам виде:

$$\frac{dy}{dx} + (2y+1)ctgx = 0$$

Переносим второе слагаемое в правую часть со сменой знака:

$$\frac{dy}{dx} = -(2y+1)ctgx$$

$$\frac{dy}{2y+1} = -ctgxdx$$

Переменные разделены, интегрируем обе части:

$$\int \frac{dy}{2y+1} = -\int ctgxdx$$

$$\int \frac{dy}{2y+1} = -\int \frac{\cos xdx}{\sin x}$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{d(2y+1)}{2y+1} = -\int \frac{d(\sin x)}{\sin x}$$

$$\frac{1}{2}\ln|2y+1| = -\ln|\sin x| + \ln|C|$$

Решение распишу очень подробно:

$$\ln|2y+1|^{\frac{1}{2}} = \ln|\sin x|^{-1} + \ln|C|$$

$$\ln\sqrt{2y+1} = \ln\frac{1}{|\sin x|} + \ln|C|$$

$$\ln\sqrt{2y+1} = \ln\left|\frac{C}{\sin x}\right|$$

$$\sqrt{2y+1} = \frac{C}{\sin x}$$

Ответ: общий интеграл: $\sqrt{2y+1}\cdot\sin x = C,$ где $C = const$

Примечание: общий интеграл любого уравнения можно записать не единственным способом. Таким образом, если у вас не совпал результат с заранее известным ответом, то это еще не значит, что вы неправильно решили уравнение.

Пример 4

Найти частное решение дифференциального уравнения $e^{y-x^2}dy - 2xdx = 0$, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = \ln 2$. Выполнить проверку.

Решение: Сначала найдем общее решение. Данное уравнение уже содержит готовые дифференциалы dy и dx, а значит, решение упрощается. Разделяем переменные:

$$e^y \cdot e^{-x^2}dy - 2xdx = 0$$

$$e^y \cdot e^{-x^2}dy = 2xdx$$

$$e^y dy = \frac{2xdx}{e^{-x^2}}$$

$$e^y dy = 2xe^{x^2}dx$$

Интегрируем уравнение:

$$\int e^y dy = 2\int xe^{x^2}dx$$

$$\int e^y dy = \int e^{x^2}d(x^2)$$

$$e^y = e^{x^2} + C$$

$$\ln e^y = \ln(e^{x^2} + C)$$

$$y = \ln(e^{x^2} + C)$$

общее решение:

$y = \ln(e^{x^2} + C),$ где $C = const$

Найдем частное решение, соответствующее заданному начальному условию $y(0) = \ln 2$

$$\ln 2 = \ln(e^0 + C)$$

$$\ln 2 = \ln(1 + C) \Rightarrow C = 1$$

$$y(0) = \ln(e^0 + C) = \ln(1 + C) = \ln 2 \Rightarrow C = 1$$

Подставляем найденное значение константы $C = 1$ в общее решение.

Ответ: частное решение: $y = \ln(e^{x^2} + 1)$

2.Линейные дифференциальные уравнения второго порядка
с постоянными коэффициентами

В теории и практике различают два типа таких уравнений – однородное уравнение и неоднородное уравнение.
Однородное ДУ второго порядка с постоянными коэффициентами имеет следующий вид: $y'' + py' + qy = 0$, где p и q – константы (числа), а в правой части – строго ноль.
Неоднородное ДУ второго порядка с постоянными коэффициентами имеет вид: $y'' + py' + qy = f(x)$, где p и q – константы, а $f(x)$ – функция, зависящая только от «икс». В простейшем случае функция $f(x)$ может быть числом, отличным от нуля.
Какая мысль приходит в голову после беглого взгляда? Неоднородное уравнение кажется сложнее. На этот раз первое впечатление не подводит!
Кроме того, чтобы научиться решать неоднородные уравнения необходимо уметь решать однородные уравнения. По этой причине сначала рассмотрим алгоритм решения линейного однородного уравнения второго порядка:
$y'' + py' + qy = 0$
Для того чтобы решить данное ДУ, нужно составить так называемое характеристическое уравнение:
$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$
По какому принципу составлено характеристическое уравнение, отчётливо видно:
вместо второй производной записываем λ^2;
вместо первой производной записываем просто «лямбду»;
вместо функции y ничего не записываем.
$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ – это обычное квадратное уравнение, которое предстоит решить.
Существуют три варианта развития событий.
Они доказаны в курсе математического анализа, и на практике мы будет использовать готовые формулы.

Характеристическое уравнение имеет два различных действительных корня
Если характеристическое уравнение $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ имеет два различных действительных корня λ_1, λ_2 (т.е., если дискриминант $D > 0$), то общее решение однородного уравнения выглядит так:
$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$, где C_1, C_2 – константы.
В случае если один из корней равен нулю, решение очевидным образом упрощается; пусть, например, $\lambda_1 = 0$, тогда общее решение: $y = C_1 e^{0 \cdot x} + C_2 e^{\lambda_2 x} = C_1 + C_2 e^{\lambda_2 x}$
Пример 5
Решить дифференциальное уравнение $y'' + y' - 2y = 0$
Решение: составим и решим характеристическое уравнение:
$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$
$D = 1 + 8 = 9; \sqrt{D} = 3$
$\lambda_1 = \dfrac{-1-3}{2} = -2$, $\lambda_2 = \dfrac{-1+3}{2} = 1$
$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$

Ответ: общее решение: $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{x},\ где\ \ C_1, C_2 - const$

Характеристическое уравнение имеет два кратных действительных корня

Если характеристическое уравнение $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ имеет два кратных (совпавших) действительных корня $\lambda_1 = \lambda_2$ (дискриминант $D = 0$), то общее решение однородного уравнения принимает вид:

$y = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2xe^{\lambda_1 x}$, где C_1, C_2 – константы.

Вместо λ_1 в формуле можно было нарисовать λ_2, корни всё равно одинаковы.

Если оба корня равны нулю $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, то общее решение опять же упрощается: $y = C_1e^{0\cdot x} + C_2xe^{0\cdot x} = C_1 + C_2x$. Кстати, $y = C_1 + C_2x$ является общим решением того самого примитивного уравнения $y'' = 0$, о котором я упоминал в начале урока. уравнение: $\lambda^2 = 0$ – действительно, данное уравнение как раз и имеет совпавшие нулевые корни $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Пример 6

Решить дифференциальное уравнение $y'' - 6y' + 9y = 0$

Решение: составим и решим характеристическое уравнение:

$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$

Здесь можно вычислить дискриминант, получить ноль и найти кратные корни. Но можно невозбранно применить известную школьную формулу сокращенного умножения:

$(\lambda - 3)^2 = 0$

Получены два кратных действительных корня $\lambda_{1,2} = 3$

Ответ: общее решение: $y = C_1e^{3x} + C_2xe^{3x},\ где\ \ C_1, C_2 - const$

Характеристическое уравнение имеет сопряженные комплексные корни

Если характеристическое уравнение $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ имеет сопряженные комплексные корни $\lambda_1 = \alpha - \beta i$, $\lambda_2 = \alpha + \beta i$ (дискриминант $D < 0$), то общее решение однородного уравнения принимает вид:

$y = e^{\alpha x}\cdot\left(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x\right)$, где C_1, C_2 – константы.

Примечание: Сопряженные комплексные корни почти всегда записывают кратко следующим образом: $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$

Если получаются чисто мнимые сопряженные комплексные корни: $\lambda_{1,2} = \pm\beta i$, то общее решение упрощается:

$y = e^{0\cdot x}\cdot\left(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x\right) = C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x$

Пример 7

Решить однородное дифференциальное уравнение второго порядка $y'' - 2y' + 10y = 0$

Решение: Составим и решим характеристическое уравнение:

$\lambda^2 - 2\lambda + 10 = 0$

$D = 4 - 40 = -36$

$\lambda_{1,2} = \dfrac{2 \pm 6i}{2} = 1 \pm 3i$ – получены сопряженные комплексные корни

Ответ: общее решение: $y = e^x(C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x),\ где\ \ C_1, C_2 - const$

Пример 8

Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$

$y'' - 4y = 0$

Решение: составим и решим характеристическое уравнение:

$\lambda^2 - 4 = 0$

$(\lambda + 2)(\lambda - 2) = 0$

$\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 2$

Получены два различных действительных корня, поэтому общее решение:

$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x},\ где\ \ C_1, C_2 - const$

Алгоритм нахождения частного решения следующий:

Сначала используем начальное условие $y(0) = 1$:

$y(0) = C_1 e^{-2 \cdot 0} + C_2 e^{2 \cdot 0} = C_1 + C_2$

Согласно начальному условию, получаем <u>первое уравнение</u>: $y(0) = C_1 + C_2 = 1$ или просто $C_1 + C_2 = 1$

Далее берём наше общее решение $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x}$ и находим производную:

$y' = (C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x})' = -2C_1 e^{-2x} + 2C_2 e^{2x}$

Используем второе начальное условие $y'(0) = 2$:

$y'(0) = -2C_1 e^{-2 \cdot 0} + 2C_2 e^{2 \cdot 0} = -2C_1 + 2C_2$

Согласно второму начальному условию, получаем <u>второе уравнение</u>: $y'(0) = -2C_1 + 2C_2 = 2$ или просто $-2C_1 + 2C_2 = 2$

Составим и решим систему из двух найденных уравнений:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ -2C_1 + 2C_2 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ -2C_1 + 2C_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ -C_1 + C_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow 2C_2 = 2$$

$C_2 = 1; C_1 = 0$

Подставим найденные значения констант $C_1 = 0; C_2 = 1$ в общее решение $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x}$:

$y = 0 \cdot e^{-2x} + 1 \cdot e^{2x} = e^{2x}$

Ответ: частное решение: $y = e^{2x}$

Задание 2. Выяснить, являются ли решениями данных дифференциальных уравнений, указанные функции**:**

1) $y' = 3x^2 + 2; y = x^3 + 2x;$

2) $y' = 4y + 3; y = \dfrac{e^{4x} - 3}{4};$

3) $y'' = x + y'; y = \dfrac{1}{x};$

4) $\dfrac{d^2 y}{dt^2} + 4y = 0, y = 5\cos(2t + 3);$

5) $y' - y = e^x; y = (x + 2)e^x;$

6) $y'' + y = 2; y = xe^x;$

7) $(x + 2)dx - 2dy = 0; y = \dfrac{x^2}{4} + x;$

8) $3y - xy' = 0; y = 4x^2 + 1;$

9) $y' - 2x = 1; y = e^2 + x;$

10) $y'' - 2y' + y = 0; y = xe^x.$

Задание 3. Найти общее решение следующих дифференциальных уравнений:

1) $y' = 2y^2;$

2) $y' = 2x^2 + 1;$

3) $y' = 5y;$

4) $y' = \sin x + \cos x;$

5) $xyy' = 0{,}5;$

6) $3x\,dy = 2y\,dx;$

7) $(x + 1)dx - 2xydy = 0;$

8) $4x - 3y^2 y' = 0;$

9) $y'(x + 1) = 1;$

10) $x\,dx = y\,dy;$

11) $y' = y\cos x;$

12) $y' = 2xy;$

13) $dy + 3y\,dx = 0;$

14) $e^y y' = 1;$

15) $e^x y' = 1;$

16) $y' = \dfrac{1}{x} + e^x.$

Задание 4. Найти частные решения дифференциальных уравнений:

1) $y\,dy - x\,dx = dx,\ \textit{если}\ y = 0\ \textit{при}\ x = 2;$

2) $y' = \frac{1}{x} + x^2,\ если\, y = 1 + \frac{e^3}{3} при\ x = e;$

3) $2xy' = y,\ если\, y = 6 при\ x = 9;$

4) $\sin x\, dx = -dy,\ если\, y = 1 при\ x = \pi/3;$

5) $3y^2 y' = y^3 + 1,\ если\, y = 2 при\ x = 0;$

6) $y' = e^x + 2e^{-x},\ если\, y = 3 при\ x = 0;$

7) $(x+1)dy = y\, dx,\ если\, y = 8 при\ x = 1.$

Задание 5. Составив дифференциальные уравнения, решить задачи:

1. Тело движется прямолинейно с ускорением а = 5 см/с^2. Начальная скорость тела v_o = 2 м/с. Вывести закон движения этого тела и вычислить путь, который оно пройдет за первые 10 мин движения.
2. Найти зависимость потенциальной энергии сжатой пружины от величины деформации.
Указание. Потенциальная энергия сжатой пружины равна работе силы F = Rx на пути от 0 до x.
3. Скорость охлаждения тела пропорциональна разности температур тела и окружающей среды. До какой температуры охладится тело за 30 мин, если за 10 мин оно охладилось от 100 до 60° С? Температура окружающей среды 20° С.
4. Уменьшение интенсивности света при прохождении через поглощающее вещество пропорционально интенсивности падающего света и толщине поглощающего слоя. Найти закон убывания интенсивности света, если известно, что при прохождении слоя l = 0,5 м интенсивность света убывает в два раза.
5. Найти закон убывания лекарственного препарата в организме человека, если через 1 ч после введения 10 мг препарата масса его уменьшилась вдвое. Какое количество препарата останется в организме через 2 ч?
6. Составить дифференциальное уравнение, описывающее движение математического маятника, считая, что углы отклонения маятника малы.

Итог работы: решение задач, защита

4. ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ

4.1 Печатные издания:

Основные:

О-1 Григорьев В. П., Математика: учебник для студ. учреждений сред. проф.образования / В.П.Григорьев, Т.Н.Сабурова. — 4-е изд., стер. — М.: Издательский центр «Академия», 2020. — 368 с.

Дополнительные:

Д-1.Башмаков, М.И.Математика. Задачник: учебное пособие/ М.И. Башмаков.- М.: ИЦ Академия,2014.-416с.
Д-2. Башмаков, М.И.Математика: учебник/ М.И. Башмаков.- М.: КНОРУС, 2017 .-394с.
Д-3. Башмаков, М.И.Математика. Книга для преподавателя: методическое пособие/ М.И. Башмаков.- М.:ИЦ Академия, 2014.-224с.

Д-4. Башмаков, М.И.Математика: учебник/ М.И. Башмаков.- М.: ИЦ Академия, 2015 .-256 с.
Д-5. Дадаян, А.А. Математика: учебник / А.А. Дадаян.-М.: ФОРУМ:ИНФРА-М, 2007.-544 с.
Д-6. Дадаян, А.А. Сборник задач по математике :учебное пособие / А.А. Дадаян.-М.: ФОРУМ:ИНФРА-М, 2013.-352 с.
Д-7. Богомолов, Н.В. Практические занятия по математике: учебное пособие/ Н.В. Богомолов.- М.: Высшая школа, 2000.-495с.

4.2. Электронные издания (электронные ресурсы)

1. ***Григорьев В. П.,*** *Математика: учебник для студ. учреждений сред. проф.образования / В.П.Григорьев, Т.Н.Сабурова. — 4-е изд., стер. — М.: Издательский центр «Академия», 2020. — 368 с.*

5. ЛИСТ ИЗМЕНЕНИЙ И ДОПОЛНЕНИЙ, ВНЕСЕННЫХ В МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

<table>
<tr><td colspan="2">№ изменения, дата внесения, № страницы с изменением</td></tr>
<tr><td>Было</td><td>Стало</td></tr>
<tr><td colspan="2">Основание:

Подпись лица, внесшего изменения</td></tr>
</table>