

**ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ИРКУТСКОЙ ОБЛАСТИ
«ЧЕРЕМХОВСКИЙ ГОРНОТЕХНИЧЕСКИЙ КОЛЛЕДЖ
ИМ. М.И. ЩАДОВА»**

РАССМОТРЕНО

на заседании ЦК
«Информатики и ВТ»
Протокол №6
«04» февраля 2025 г.
Председатель: Н.С. Коровина

УТВЕРЖДАЮ

Зам. директора
О.В. Папанова
« 26» мая 2025 г.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

по практическим занятиям студентов

учебной дисциплины

ЕН.01 Элементы высшей математики

09.02.07 Информационные системы и программирование

Разработал:

Е.А. Литвинцева

2025 г.

СОДЕРЖАНИЕ

	СТР.
1. ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА	3
2. ПЕРЕЧЕНЬ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ	4
3. СОДЕРЖАНИЕ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ	4
4. ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ	81
ЛИСТ ИЗМЕНЕНИЙ И ДОПОЛНЕНИЙ, ВНЕСЁННЫХ В МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ	83

1. ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Методические указания по практическим занятиям учебной дисциплине «**Элементы высшей математики**» составлены в соответствии с учебным планом и рабочей программы дисциплины по специальности **09.02.07 Информационные системы и программирование**.

Цель проведения практических занятий: формирование практических умений, необходимых в последующей профессиональной и учебной деятельности.

Методические указания практических занятий являются частью учебно-методического комплекса по учебной дисциплине и содержат:

- тему занятия (согласно тематическому плану учебной дисциплины);
- цель;
- оборудование (материалы, программное обеспечение, оснащение, раздаточный материал и др.);
- методические указания (изучить краткий теоретический материал по теме практического занятия);
- ход выполнения;
- форму отчета.

В результате выполнения полного объема заданий практических занятий студент должен **уметь**:

- выполнять операции над матрицами и решать системы линейных уравнений;
- решать задачи, используя уравнения прямых и кривых второго порядка на плоскости;
- применять методы дифференциального и интегрального исчисления;
- решать дифференциальные уравнения;
- пользоваться понятиями теории комплексных чисел.
- решать задачи с использованием системы линейных уравнений;
- производить анализ систем линейных уравнений.

При проведении практических работ применяются следующие технологии и методы обучения: работа в группе, информационно – коммуникационные технологии.

Оценка выполнения заданий практических занятий

«Отлично» - теоретическое содержание курса освоено полностью, без пробелов, умения сформированы, все предусмотренные программой учебные задания выполнены, качество их выполнения оценено высоко.

«Хорошо» - теоретическое содержание курса освоено полностью, без пробелов, некоторые умения сформированы недостаточно, все предусмотренные программой учебные задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками.

«Удовлетворительно» - теоретическое содержание курса освоено частично, но пробелы не носят существенного характера, необходимые умения работы с освоенным материалом в основном сформированы, большинство предусмотренных программой обучения учебных заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки.

«Неудовлетворительно» - теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки.

В соответствии с учебным планом и рабочей программы дисциплины **«Элементы высшей математики»** на практические (лабораторные) занятия отводится **50 часов**.

2. ПЕРЕЧЕНЬ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

№ п/п	Тема практических занятий	Количество часов
1.	Выполнение операций над матрицами	2
2.	Вычисление определителей	2
3.	Нахождение обратной матрицы. Вычисление ранга матрицы.	2
4.	Решение систем линейных уравнений различными методами	2
5.	Решение систем линейных уравнений различными методами	2
6.	Решение систем линейных уравнений различными методами	2
7.	Составление уравнений прямых, их построение. Решение задач, используя уравнения прямых на плоскости	2
8.	Решение задач, используя уравнения кривых второго порядка на плоскости: составление уравнений окружности, эллипса, их построение.	2
9.	Составление уравнений гиперболы и параболы и их построение	2
10.	Применение методов дифференциального исчисления: вычисление производных сложных функций	2
11.	Производные и дифференциалы высших порядков	2
12.	Применение методов дифференциального исчисления: полное исследование функции. Построение графиков	2
13.	Применение методов интегрального исчисления: интегрирование заменой переменной и по частям в неопределенном интеграле	2
14.	Применение методов интегрального исчисления: интегрирование рациональных и иррациональных функций	2
15.	Применение методов интегрального исчисления: интегрирование тригонометрических функций Универсальная подстановка	2
16.	Применение методов интегрального исчисления: вычисление определенных интегралов	2
17.	Применение методов интегрального исчисления: вычисление площадей фигур с помощью определенных интегралов Применение методов интегрального исчисления: вычисление площадей фигур с помощью определенных интегралов	2
18.	Определение сходимости числовых рядов	2
19.	Анализ функционального ряда.	2
20.	Решение дифференциальных уравнений первого порядка	2
21.	Решение дифференциальных уравнений второго порядка	2
22.	Решение задач с использованием дифференциальных уравнений	2
23.	Действия с комплексными числами	2
24.	Элементы аналитической геометрии	2
25.	Поверхности второго порядка	2

3. СОДЕРЖАНИЕ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

Практическое занятие № 1

Тема: Выполнение операций над матрицами

Цель: закрепить и проконтролировать умения выполнять операции над матрицами, находить значение матричного многочлена.

Оборудование: тетрадь, ручка

Методические указания: ознакомиться с теоретическим материалом, рассмотреть примеры решения задач, решить задачи по вариантам (вариант назначается преподавателем)

Ход выполнения:

Теоретический материал и методические указания к выполнению заданий

Операции над матрицами

1. Сложение и вычитание матриц определены только для матриц одинакового размера.

Суммой (разностью) матриц является матрица, элементами которой являются соответственно сумма (разность) элементов исходных матриц. $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$.

2. Умножения (деления) матрицы любого размера на произвольное число сводится к умножению (делению) каждого элемента матрицы на это число.

3. Произведением матриц называется матрица, элементы которой могут быть вычислены по следующим формулам:

$$A \times B = C;$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj}$$

Пример:

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot (-1) + 3 \cdot (-2) & 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \\ 5 \cdot (-1) + 7 \cdot (-2) & 5 \cdot 2 + 7 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 13 \\ -19 & 31 \end{pmatrix}$$

4. Транспонирование матрицы (обозначение: A^T) — операция, при которой матрица отражается относительно главной диагонали, то есть

$$a_{ij}^T = a_{ji}$$

Пример: Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ и число $\alpha = 2$. Найти

$A^T B + \alpha C$.

Решение: $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $A^T B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \\ 0 \cdot 1 + 4 \cdot 3 - 4 \cdot 2 \\ 3 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix}$;

$$\alpha C = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad A^T B + \alpha C = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Пример: Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ и $B = (2 \ 4 \ 1)$. Найти произведение матриц AB и

BA .

Решение: $AB = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot (2 \ 4 \ 1) = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 & 1 \cdot 4 & 1 \cdot 1 \\ 4 \cdot 2 & 4 \cdot 4 & 4 \cdot 1 \\ 3 \cdot 2 & 3 \cdot 4 & 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 8 & 16 & 4 \\ 6 & 12 & 3 \end{pmatrix}$.

$$BA = (2 \ 4 \ 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = (2 \cdot 1 + 4 \cdot 4 + 1 \cdot 3) = (2 + 16 + 3) = (21).$$

Вариант 1

1. Вычислите матрицу $D = (A - B)^T \cdot C$, где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 4 & -1 & 5 \\ 2 & -6 & -1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ -1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. Найти значение матричного многочлена $f(A)$:

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 1, A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. Вычислите матрицу $D=AB-2E$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad E - \text{единичная матрица}.$$

4. Найти произведение матриц:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Вариант 2

1. Вычислите матрицу $D=A*(B+C)$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 0 & 5 & 7 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -4 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -5 \end{pmatrix}$$

2. Найти значение матричного многочлена $f(A)$:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 5, A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

3. Вычислите матрицу $D=AB+4E$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}; \quad E - \text{единичная матрица}.$$

4. Найти произведение матриц:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

Вариант 3

1. Вычислите матрицу $D=A*(B-C)^T$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 2 & 5 & -3 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

2. Найти значение матричного многочлена $f(A)$:

$$f(x) = 2x^3 - x^2 + 3, A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Вычислите матрицу $D=AB+3E$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad E - \text{единичная матрица}.$$

4. Найти произведение матриц:

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Вариант 4

1. Вычислите матрицу $D = BA + B - A^T$:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -8 & -4 \\ 7 & 0 & -5 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

2. Найти значение матричного многочлена $f(A)$:

$$f(x) = 4x^3 - 2x^2 + 3x - 2, A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Вычислите матрицу $D = AB - 5E$, где

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}; \quad E - \text{единичная матрица.}$$

4. Найти произведение матриц:

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Форма отчета: отчетная работа

Практическое занятие № 2

Тема: Вычисление определителей

Цель: закрепить усвоение теоретического материала по данной теме через решение упражнений; закрепить умения вычислять определители матриц различных порядков.

Оборудование: тетрадь, ручка

Методические указания: ознакомиться с теоретическим материалом, рассмотреть примеры решения задач, решить задачи по вариантам (вариант назначается преподавателем)

Ход выполнения:

Теоретические сведения и методические указания к выполнению заданий

Определителем второго порядка называется число, равное разности произведений элементов главной и второй диагонали:

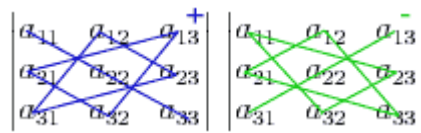
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Пример: $\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} = -15 - 8 = -23$

Определителем третьего порядка называется следующее выражение:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Правило треугольников:



$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Пример: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 6 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 6 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 5 + 4 \cdot (-1) \cdot (-3) - (2 \cdot 6 \cdot (-3) + 4 \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot 5 \cdot (-1)) = 71.$

Теорема Лапласа: *Определителем n-го порядка*, соответствующим матрице A_{nn} , называется число

$$\Delta = \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{1j} M_{1j} = a_{11} A_{11} + \dots + A_{1j} + \dots + a_{1n} A_{1n}.$$

Для вычисления определителя можно использовать элементы произвольной строки или столбца.

Пример: Вычислить данный определитель четвёртого порядка с помощью разложения по строке или столбцу:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 6 & 3 \end{vmatrix}$$

Решение. Удобнее всего делать разложение по строке или столбцу, в которых встречается наибольшее число нулевых элементов. В данном случае – это четвёртый столбец. Итак, имеем

Полученные в итоге два определителя третьего порядка вычислим тем же методом. В определителе Δ_1 нулевых элементов нет, поэтому можно выбрать для разложения любой из столбцов, например, первый. В Δ_2 единственный нулевой элемент находится на пересечении первого столбца со второй строкой. Для разнообразия будем разлагать Δ_2 по второй строке:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-6 - 2) - 3 \cdot (-6 - 1) + 3 \cdot (-2 + 1) =$$

$$= -16 + 21 - 3 = 2$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (4 - 3) - 2 \cdot (-2 + 3) = 1 - 2 = -1$$

Таким образом окончательно получим: $\Delta = \Delta_1 + 3\Delta_2 = 2 + 3 \cdot (-1) = -1$

Свойства определителей

1. При транспонировании матрицы определитель не меняется.
2. При перестановке любых двух строк (столбцов) определитель меняет только знак.
3. При умножении строки (столбца) на некоторое число определитель умножается на это число.

4. Если все соответствующие элементы квадратных матриц одного порядка одинаковы, за исключением элементов одной i -ой строки, то

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ b_{i1} & \dots & b_{in} \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{i1} + b_{i1} & \dots & a_{in} + b_{in} \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

5. Величина определителя не изменяется, если к элементам некоторой строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженной на некоторое число.

Определитель равен нулю, если:

- все элементы некоторой строки (столбца) равны нулю.
- две строки (столбца) одинаковы.
- две строки (столбца) определителя пропорциональны.

Вариант 1

1. Решите уравнения: а) $\begin{vmatrix} 2x-1 & 3 \\ x+4 & 7 \end{vmatrix} = 0$. б) $\begin{vmatrix} 1 & x & 1 \\ 4 & 5 & x \\ 0 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 1$

2. Вычислить определители: а) $\begin{vmatrix} 21 & -3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 0 & 9 & 3 \\ 4 & -5 & 2 \\ 1 & 8 & 9 \end{vmatrix}$.

3. Вычислить определители, используя разложение по строке или столбцу:

а) $\begin{vmatrix} 4 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ -7 & 8 & 0 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & 0 \\ -3 & 4 & -5 & 3 \\ -5 & 7 & -7 & 5 \\ 8 & -8 & 5 & 6 \end{vmatrix}$.

Вариант 2

1. Решите уравнение: а) $\begin{vmatrix} x+3 & x-1 \\ 7-x & x-1 \end{vmatrix} = 0$. б) $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 1 & x-3 & x \\ 3 & 2 & 7 \end{vmatrix} = -3$

2. Вычислить определители: а) $\begin{vmatrix} -8 & 4 \\ -5 & 10 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$.

3. Вычислить определители, используя разложение по строке или столбцу:

а) $\begin{vmatrix} 7 & 1 & -9 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 7 & 10 \\ 3 & 5 & 11 & 0 \\ 2 & -7 & 4 & 3 \end{vmatrix}$.

Вариант 3

1. Решите уравнение: а) $\begin{vmatrix} 2x-1 & x+1 \\ x+2 & x-1 \end{vmatrix} = 0$. б) $\begin{vmatrix} 3 & x & 1 \\ x-2 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 9 \end{vmatrix} = 2$

2. Вычислить определители: а) $\begin{vmatrix} -7 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & -3 \end{vmatrix}$.

3. Вычислить определители, используя разложение по строке или столбцу:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 2 & 0 & 9 \\ 1 & -8 & 6 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

Вариант 4

1. Решите уравнение: а) $\begin{vmatrix} x-2 & x+3 \\ -x-3 & x-2 \end{vmatrix} = 0$. б) $\begin{vmatrix} 3 & x & 4 \\ -2 & 5 & -2 \\ 0 & x & 9 \end{vmatrix} = 4$

2. Вычислить определители: а) $\begin{vmatrix} 5 & 11 \\ 4 & -7 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 6 \end{vmatrix}$

3. Вычислить определители, используя разложение по строке или столбцу:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 6 & 0 & 7 \\ 2 & -8 & 0 \\ 1 & 5 & -1 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 8 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & 4 & 7 & 5 \end{vmatrix}.$$

Форма отчета: отчетная работа

Практическое занятие № 3

Тема: Нахождение обратной матрицы. Вычисление ранга матрицы.

Цель: закрепить усвоение теоретического материала по данной теме через решение упражнений; закрепить умения находить обратную матрицу; закрепить умения вычислять ранг матрицы.

Оборудование: тетрадь, ручка

Методические указания: ознакомиться с теоретическим материалом, рассмотреть примеры решения задач, решить задачи по вариантам (вариант назначается преподавателем)

Ход выполнения:

Теоретический материал

Обратная матрица

Определение. Квадратная матрица A^{-1} называется *обратной* к квадратной матрице A того же порядка, если $AA^{-1} = A^{-1}A = E$, где E - единичная матрица.

Алгоритм нахождения обратной матрицы:

1. Вычислить определитель.
2. Транспонировать матрицу.
3. Вычислить алгебраические дополнения всех элементов транспонированной матрицы.
4. Выписываем обратную матрицу по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11}^T & \dots & A_{1n}^T \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{n1}^T & \dots & A_{nn}^T \end{pmatrix}$$

Пример: найти матрицу $C = A^{-1}$ обратную к A , если $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение. Прежде всего, вычислим определитель матрицы A , чтобы убедиться в возможности существования обратной матрицы.

$$|A| = \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (2 \cdot 0 - 1 \cdot 1) + 3 \cdot (0 \cdot 1 - 2 \cdot 1) = -1 - 6 = -7 \neq 0$$

Следовательно, для A существует обратная матрица.

Воспользуемся теперь формулой, выражающей элементы обратной матрицы через алгебраические дополнения к элементам транспонированной матрицы. Для

$$A^T \text{ имеем } A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вычислим последовательно элементы c_{ij} :

$$A_{11}^T = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{12}^T = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-3) = 3, \quad A_{13}^T = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -6,$$

$$A_{21}^T = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-1) = 1, \quad A_{22}^T = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{23}^T = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 1 = -1,$$

$$A_{31}^T = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{32}^T = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 1 = -1, \quad A_{33}^T = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2.$$

С учётом полученного, обратная к A матрица имеет вид

$$C = A^{-1} = \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы

Определение. Ранг матрицы – это порядок её базисного минора (наивысший порядок, отличных от нуля миноров).

Утверждение. Ранг матрицы не меняется

- при транспонировании матрицы.
- при перестановке её строк и столбцов.
- при умножении всех элементов её строки (столбца) на число отличное от нуля.
- при добавлении к одной из строк (столбцов) линейной комбинации из других её строк (столбцов).
- при удалении (вычёркивании) из неё строки (столбца) из нулей.
- при удалении из неё строки (столбца), представляющей линейную комбинацию других строк (столбцов).

Пример. Найти ранг матрицы: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & -3 & -2 \\ 3 & 4 & 3 & -1 & -3 \\ 5 & 6 & -1 & 3 & -5 \end{pmatrix}.$

Решение. Используем свойства ранга матрицы. Для удобства преобразуем матрицу так, чтобы в первой строке самый крайний слева элемент был равен единице. Для этого вычтем первую строку из второй и преобразованную вторую строку поменяем местами с первой.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & -3 & -2 \\ 3 & 4 & 3 & -1 & -3 \\ 5 & 6 & -1 & 3 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ 5 & 6 & -1 & 3 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & -3 & -2 \\ 5 & 6 & -1 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

Теперь из второй и третьей строк вычтем первую, умноженную соответственно на 2 и 5:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & -3 & -2 \\ 5 & 6 & -1 & 3 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 9 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & -7 & 0 \end{pmatrix}.$$

Третья строка равна второй и её можно вычеркнуть согласно свойству 6. Таким образом, исходная матрица в результате эквивалентных преобразований переходит в следующую:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 9 & -7 & 0 \end{pmatrix}.$$

В этой матрице имеются миноры второго порядка, отличные от нуля, например, минор $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$. Этот минор можно выбрать в качестве базисного. Следовательно, ранг исходной матрицы равен двум: $rg(A) = 2$.

Вариант 1

1. Определить имеет ли матрица: обратную, и если имеет, то найти ее:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Найти ранги матриц:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 1 & 6 & 11 \\ 1 & -1 & -1 & 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

3. Дана матрица A . Найти: а) AA^{-1} ; б) $A^{-1}A$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Вариант 2

1. Определить имеет ли матрица: обратную, и если имеет, то найти ее:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Найти ранги матриц:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -7 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 6 & -4 \\ -1 & 2 & -1 & -10 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Дана матрица A . Найти: а) AA^{-1} ; б) $A^{-1}A$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

Вариант 3

1. Определить имеет ли матрица: обратную, и если имеет, то найти ее:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 4 \\ 3 & 10 & 8 \end{pmatrix}.$$

2. Найти ранги матриц:

$$а) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -4 & 2 \\ 5 & -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}. \quad б) \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -14 & 22 \\ -2 & 1 & 3 & 3 & -9 \\ -4 & -3 & 11 & -19 & 17 \end{pmatrix}.$$

3. Дана матрица A . Найти: а) AA^{-1} ; б) $A^{-1}A$.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ -3 & 0 & 1 \\ 5 & 6 & -4 \end{pmatrix}.$$

Вариант 4

1. Определить имеет ли матрица: обратную, и если имеет, то найти ее:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 4 \\ -4 & -14 & -6 \end{pmatrix}.$$

2. Найти ранги матриц:

$$а) \begin{pmatrix} 0 & 2 & 8 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 1 \\ 4 & -10 & 2 & 2 \end{pmatrix}. \quad б) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -5 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

3. Дана матрица A . Найти: а) AA^{-1} ; б) $A^{-1}A$.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 8 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Форма отчета: отчетная работа

Практическое занятие № 4-6

Тема: Решение систем линейных уравнений различными методами

Цель: закрепить усвоение теоретического материала по данной теме через решение упражнений; закрепить умения решать системы линейных уравнений различными методами; закрепить умения решать матричные уравнения; закрепить умения находить общее решение системы линейных уравнений.

Оборудование: тетрадь, ручка

Методические указания: ознакомиться с теоретическим материалом, рассмотреть примеры решения задач, решить задачи по вариантам (вариант назначается преподавателем)

Ход выполнения:

Теоретические сведения и методические указания к выполнению заданий Метод Крамера

Теорема. Пусть Δ - определитель матрицы системы A , а Δ_j - определитель матрицы, полученной из матрицы A заменой j -ого столбца столбцом свободных членов B . Тогда система уравнений имеет единственное решение, определяемое по формулам:

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta} \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

Пример: решить систему уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -1, \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 = -1, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7. \end{cases}$$

Решение: запишем данную систему уравнений на языке матриц.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Вычислим главный определитель матрицы системы:

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 6 + 18 - 12 - (9 - 12 + 12) = 3.$$

Вычислим вспомогательные определители (самостоятельно, у доски):

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \\ 7 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & -1 & -3 \\ 3 & 7 & 3 \end{vmatrix} = 6, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 3.$$

По формулам Крамера, получаем: $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{0}{3} = 0$, $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{6}{3} = 2$, $x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{3}{3} = 1$.

Ответ: (0;2;1).

Метод обратной матрицы

Пусть имеется система линейных уравнений $AX=B$ и ее определитель не равен нулю.

$X = A^{-1} \cdot B$ - решение системы.

Пример: решить систему уравнений методом обратной матрицы:

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -1, \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 = -1, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7. \end{cases}$$

Решение: Система, как и прошлом примере, но теперь ее решим методом обратной матрицы.

Найдем обратную матрицу A^{-1} :

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3.$$

Транспонируем матрицу $A^T = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$

Находим алгебраические дополнения всех элементов транспонированной матрицы:

$$A_{11}^T = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 6 = 9$$

$$A_{21}^T = -\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} = -(-6 + 9) = -3$$

$$A_{31}^T = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -4 - 3 = -7$$

$$A_{12}^T = -\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -(-6 - 6) = 12$$

$$A_{22}^T = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 9 = -3$$

$$A_{32}^T = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -(4 + 6) = -10$$

$$A_{13}^T = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = 6 - 3 = 3$$

$$A_{23}^T = -\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -(-6 + 6) = 0$$

$$A_{33}^T = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 4 = -2$$

Выписываем обратную матрицу:

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 9 & 12 & 3 \\ -3 & -3 & 0 \\ -7 & -10 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Тогда } X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 9 & 12 & 3 \\ -3 & -3 & 0 \\ -7 & -10 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Метод Гаусса

Сущность этого метода состоит в том, что посредством последовательных исключений неизвестных данная система превращается в ступенчатую (в частности, треугольную) систему.

Приведение матрицы к треугольному виду называется **прямым ходом метода Гаусса**.

Нахождение переменных – **обратным ходом**.

Пример. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3 \\ 7x_1 + x_2 - x_3 = 10 \end{cases}$$

Решение: составим расширенную матрицу системы.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & -3 \\ 7 & 1 & -1 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ 7 & 1 & -1 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & -7 & 11 \\ 0 & 15 & -22 & 31 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & -7 & 11 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Таким образом, исходная система может быть представлена в виде:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3 \\ 5x_2 - 7x_3 = 11 \\ -x_3 = -2 \end{cases}$$

, откуда получаем: $x_3 = 2$; $x_2 = 5$; $x_1 = 1$.

Вариант 1

1. Проверить совместимость системы уравнений и в случае совместимости решить ее: а) по формулам Крамера; б) с помощью обратной матрицы (матричным методом); в) методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 1, \\ 5x_1 + x_3 = -1. \end{cases}$$

2. Решить матричное уравнение:

$$X \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

3. Найти общее решение для каждой из заданных систем алгебраических уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 4, \\ -2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 6, \\ 4x_2 - 3x_3 + x_4 + 5x_4 = 2, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 4. \end{cases}$$

Вариант 2

1. Проверить совместимость системы уравнений и в случае совместимости решить ее: а) по формулам Крамера; б) с помощью обратной матрицы (матричным методом); в) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -5, \\ x_2 - 2x_3 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -1. \end{cases}$$

2. Решить матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 6 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. Найти общее решение для каждой из заданных систем алгебраических уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = -6, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 7x_4 = -4, \\ -3x_2 - 10x_3 + 6x_4 = -5, \\ 4x_1 + 10x_2 + 2x_3 + 15x_4 = -7. \end{cases}$$

Вариант 3

1. Проверить совместимость системы уравнений и в случае совместимости решить ее: а) по формулам Крамера; б) с помощью обратной матрицы (матричным методом); в) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 3, \\ 3x_1 + 5x_2 = 3. \end{cases}$$

2. Решить матричное уравнение:

$$X \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}. \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Найти общее решение для каждой из заданных систем алгебраических уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 5, \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 - x_4 = -5, \\ x_2 + 5x_3 - x_4 = -2, \\ 5x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 5. \end{cases}$$

Вариант 4

1. Проверить совместимость системы уравнений и в случае совместимости решить ее: а) по формулам Крамера; б) с помощью обратной матрицы (матричным методом); в) методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\ -2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = -5, \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 10. \end{cases}$$

2. Решить матричное уравнение:

$$X \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 8 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Найти общее решение для каждой из заданных систем алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 20, \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 17, \\ -3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 = -4. \end{cases}$$

Форма отчета: отчетная работа

Практическое занятие № 7

Тема: Составление уравнений прямых, их построение. Решение задач, используя уравнения прямых на плоскости

Цель: закрепить усвоение теоретического материала по данной теме через решение упражнений; закрепить умения находить уравнения прямых и кривых второго порядка, строить их.

Оборудование: тетрадь, ручка

Методические указания:

ознакомиться с теоретическим материалом, рассмотреть примеры решения задач, решить задачи по вариантам (вариант назначается преподавателем)

Ход выполнения:

Теоретический материал и методические указания к выполнению заданий **ПРЯМАЯ ЛИНИЯ НА ПЛОСКОСТИ**

Уравнение с угловым коэффициентом: $y = kx + b$

Уравнение прямой, проходящей через точку $A(x_0; y_0)$ под заданным углом φ :
 $y - y_0 = k(x - x_0)$

Уравнение прямой, проходящей через две точки: $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$

ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ДВУХ ПРЯМЫХ

Условие параллельности двух прямых $y = kx + b$ и $y = k_1x + b_1$ имеет вид: $k = k_1$

Условие перпендикулярности двух прямых $y = kx + b$ и $y = k_1x + b_1$ имеет вид:

$$k = -\frac{1}{k_1}$$

Расстояние d от точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$ представляет собой длину перпендикуляра, опущенного из точки на прямую и определяется формулой

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Тангенс угла φ между прямыми $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ определяется формулой

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right|$$

Пример:

Треугольник ABC задан координатами вершин. Найти: 1) уравнения сторон треугольника; 2) величину угла наклона прямой AB к оси абсцисс, а также величины внутренних углов треугольника; 3) уравнения высот треугольника и координаты точки P их пересечения; 4) длину медианы AM треугольника; 5) уравнение прямой, проходящей через точку P параллельно прямой AC . Сделать чертеж.

$$A(-1; -1), B(1; 3), C(7; 1).$$

1) Для нахождения уравнений сторон треугольника воспользуемся уравнением $\frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$ прямой, проходящей через две заданные точки $N_0(x_0; y_0)$ и $N_1(x_1; y_1)$.

Так как $A(-1; -1)$, $B(1; 3)$, то уравнение AB имеет вид $\frac{y - (-1)}{3 - (-1)} = \frac{x - (-1)}{1 - (-1)}$, или, после упрощения, $y = 2x + 1$. Аналогично находим уравнения сторон BC и AC .

$$\text{Уравнение } BC: \frac{y - 3}{1 - 3} = \frac{x - 1}{7 - 1} \text{ или } y = -\frac{1}{3}x + \frac{10}{3}.$$

$$\text{Уравнение } AC: \frac{y - (-1)}{1 - (-1)} = \frac{x - (-1)}{7 - (-1)} \text{ или } y = \frac{1}{4}x - \frac{3}{4}.$$

2) Пусть α — величина угла наклона прямой AB к оси абсцисс (см. рис. 1). Тогда $\operatorname{tg} \alpha = k_{AB} = 2$, откуда $\alpha \approx 63^\circ$.

Найдем углы треугольника по формуле

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2},$$

$$\operatorname{tg} \hat{A} = \frac{2 - \frac{1}{4}}{1 + 2 \cdot \frac{1}{4}} = \frac{7}{6}, \quad \text{откуда } \hat{A} \approx 49^\circ.$$

$$\operatorname{tg} \hat{B} = \frac{\left(-\frac{1}{3}\right) - 2}{1 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)} = -7, \quad \text{откуда } \hat{B} \approx 180^\circ - 81^\circ = 99^\circ.$$

$$\operatorname{tg} \hat{C} = \frac{\frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{3}\right)}{1 + \frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{7}{11}, \quad \text{откуда } \hat{C} \approx 32^\circ.$$

3) Для нахождения уравнений высот треугольника воспользуемся уравнением $y - y_0 = k(x - x_0)$ прямой, проходящей через точку с координатами x_0, y_0 и имеющей угловой коэффициент k . Высота AH есть отрезок прямой, проходящей через точку A перпендикулярно BC . Следовательно, уравнение высоты AH есть $y + 1 = k_{AH}(x + 1)$, где $k_{AH} = -\frac{1}{k_{BC}} = 3$ (при вычислении k_{AH} использовано условие перпендикулярности прямых). Поэтому уравнение высоты AH имеет вид $y + 1 = 3(x + 1)$, или $y = 3x + 2$.

Аналогично находим уравнения высот BE и CF . Для BE $k_{BE} = -\frac{1}{k_{AC}} = -4$, поэтому уравнение высоты BE есть $y - 3 = -4(x - 1)$, или $y = -4x + 7$.

Для CF $k_{CF} = -\frac{1}{k_{AB}} = -\frac{1}{2}$, поэтому уравнение CF есть $y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 7)$, или $y = -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$.

Для нахождения координат точки пересечения высот решим систему уравнений, составленную из уравнений прямых AH и BE :

$$\begin{cases} y = 3x + 2, \\ y = -4x + 7. \end{cases}$$

Получаем $x = \frac{5}{7}$, $y = 4\frac{1}{7}$.

Итак, высоты треугольника пересекаются в точке $P(\frac{5}{7}; 4\frac{1}{7})$.

4) Координаты x_M, y_M середины M стороны BC можно найти как среднее арифметическое соответствующих координат точек B и C :

$$x_M = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{1 + 7}{2} = 4, \quad y_M = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{3 + 1}{2} = 2.$$

Длину медианы AM можно найти по формуле

$$|AM| = \sqrt{(x_A - x_M)^2 + (y_A - y_M)^2},$$

где x_A, y_A — координаты точки A , x_M, y_M — координаты точки M .

Поэтому $|AM| = \sqrt{(-1 - 4)^2 + (-1 - 2)^2} = \sqrt{34}$.

5) Уравнение прямой, проходящей через точку P параллельно прямой AC , можно записать в виде $y - y_0 = k(x - x_0)$, где x_0, y_0 — координаты точки P , $k = k_{AC}$ — угловой коэффициент прямой AC . Поэтому искомое уравнение имеет вид

$$y - 4\frac{1}{7} = \frac{1}{4}(x - \frac{5}{7}), \text{ или } y = \frac{1}{4}x + 3\frac{27}{28}.$$

Вариант 1

Даны координаты вершин треугольника ABC : $A(1; -1)$, $B(4; 3)$, $C(5; 1)$.
Найти:

- уравнения сторон треугольника и их угловые коэффициенты;
- величину угла наклона прямой AB к оси абсцисс, а также величины внутренних углов треугольника;
- уравнения высот треугольника и координаты точки P из пересечения;
- длину медианы AM треугольника;
- уравнение прямой, проходящей через точку P параллельно прямой AC
- Построить заданный треугольник и все линии в системе координат:

Вариант 2

Даны координаты вершин треугольника ABC : $A(0; -1)$, $B(3; 3)$, $C(4; 1)$.
Найти:

- уравнения сторон треугольника и их угловые коэффициенты;
- величину угла наклона прямой AB к оси абсцисс, а также величины внутренних углов треугольника;
- уравнения высот треугольника и координаты точки P из пересечения;
- длину медианы AM треугольника;
- уравнение прямой, проходящей через точку P параллельно прямой AC
- Построить заданный треугольник и все линии в системе координат:

Вариант 3

Даны координаты вершин треугольника ABC: A (1; -2), B (4; 2), C (5; 0).

Найти:

1. уравнения сторон треугольника и их угловые коэффициенты;
2. величину угла наклона прямой AB к оси абсцисс, а также величины внутренних углов треугольника;
3. уравнения высот треугольника и координаты точки P из пересечения;
4. длину медианы AM треугольника;
5. уравнение прямой, проходящей через точку P параллельно прямой AC
6. Построить заданный треугольник и все линии в системе координат:

Вариант 4

Даны координаты вершин треугольника ABC: A (2; -2), B (5; 2), C (6; 0).

Найти:

1. уравнения сторон треугольника и их угловые коэффициенты;
2. величину угла наклона прямой AB к оси абсцисс, а также величины внутренних углов треугольника;
3. уравнения высот треугольника и координаты точки P из пересечения;
4. длину медианы AM треугольника;
5. уравнение прямой, проходящей через точку P параллельно прямой AC
6. Построить заданный треугольник и все линии в системе координат:

Форма отчета: отчетная работа

Практическое занятие № 8

Тема: Решение задач, используя уравнения кривых второго порядка на плоскости: составление уравнений окружности, эллипса, их построение.

Цель: закрепить усвоение теоретического материала по данной теме через решение упражнений; закрепить умения находить канонические уравнения окружности и эллипса, строить их.

Оборудование: тетрадь, ручка

Методические указания: ознакомиться с теоретическим материалом, рассмотреть примеры решения задач, решить задачи по вариантам (вариант назначается преподавателем)

Ход выполнения:

Теоретический материал и методические указания к выполнению заданий

Кривой второго порядка называется линия, которая аналитически определяется уравнением 2-й степени относительно x и y .

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \text{ где}$$

A, B, C, D, E, F – действительные числа.

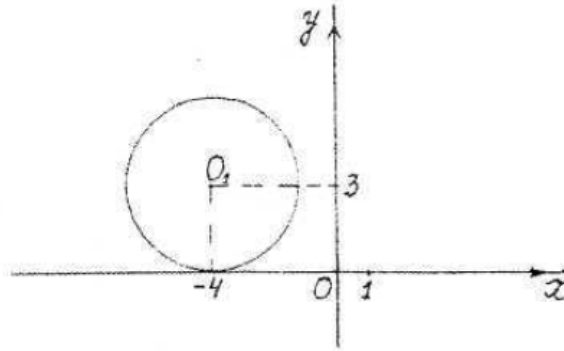
Уравнения окружности

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

Пример: Построить линии по уравнениям в прямоугольной системе координат:

$$(x + 4)^2 + (y - 3)^2 = 9.$$

Уравнением окружности с центром в начале координат и радиусом R является уравнение $x^2 + y^2 = R^2$. Следовательно, $(x + 4)^2 + (y - 3)^2 = 9$ есть уравнение окружности с центром в точке O_1 с координатами $x = -4, y = 3$ и радиусом $R = 3$ (см. рис. 6).



Каноническое уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

a - большая полуось эллипса

b - малая полуось эллипса

$c = \sqrt{a^2 - b^2}$; - полуфокусное расстояние

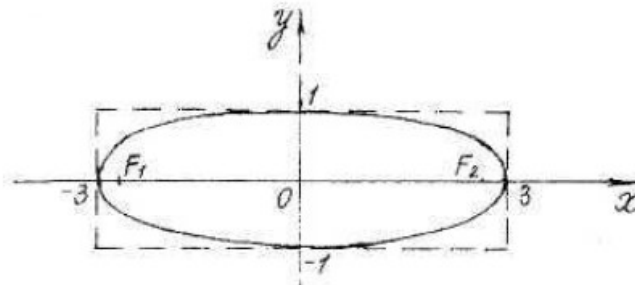
$\varepsilon = \frac{c}{a}$ - эксцентриситет эллипса

$x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$ - директрисы эллипса

Пример: построить линии по уравнениям в прямоугольной системе координат:

$$\frac{x^2}{9} + y^2 = 1,$$

Каноническим уравнением эллипса является уравнение $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, при этом фокусы находятся в точках $F_1(-c; 0)$ и $F_2(c; 0)$, где $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ ($a > b$). Следовательно, $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$ есть уравнение эллипса с полуосями $a = 3$ и $b = 1$. Фокусы эллипса находятся в точках $F_1(-2\sqrt{2}; 0)$ и $F_2(2\sqrt{2}; 0)$. Эллипс вписан в прямоугольник со сторонами $x = 3, x = -3, y = 1, y = -1$, центр эллипса находится в начале координат



Пример установить вид линии второго порядка, привести уравнение к каноническому виду и построить эту линию: $x^2 + y^2 + 4x + 2y + 1 = 0$,

Решение: Уравнение $x^2 + y^2 + 4x + 2y + 1 = 0$ определяет окружность, так как $A=C=1$. Для получения канонического уравнения окружности выделим полные квадраты по переменным x и y :

$$\begin{aligned} (x^2 + 4x + 4) + (y^2 + 2y + 1) - 4 &= 0, \\ (x + 2)^2 + (y + 1)^2 &= 4. \end{aligned}$$

Итак, получено каноническое уравнение окружности с центром в точке $(-2,-1)$ и радиусом $R=2$

Пример: установить вид линии второго порядка, привести уравнение к каноническому виду и построить эту линию: $5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 0$

Решение: Уравнение $5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 0$ определяет эллипс, так как $A \times C = 5 \times 9 > 0$. Чтобы получить каноническое уравнение эллипса, выделим полные квадраты по переменным x и y и поделим полученное уравнение на свободный член:

$$5(x^2 - 6x + 9) + 9(y^2 + 2y + 1) + 9 - 5 \times 9 - 9 = 0,$$

$$5(x - 3)^2 + 9(y + 1)^2 = 45,$$

$$\frac{(x - 3)^2}{9} + \frac{(y + 1)^2}{5} = 1.$$

Итак, получено каноническое уравнение эллипса с центром в точке $(3,-1)$ и полуосями $a = 3$ (большая) и $b = \sqrt{5}$ (малая).

Вариант 1

1. Определить тип линии по уравнениям и построить в прямоугольной системе координат:

a. $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 9$

b. $x^2 + (y + 5)^2 = 1$

c. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$

d. $\frac{(x - 4)^2}{9} + \frac{(y - 1)^2}{25} = 1$

2. Составить уравнение окружности с центром в точке $C(1;4)$ и радиусом $R=3$. Проверить, лежат ли на этой окружности точки $D(0;5)$, $A(1;7)$, $B(2;3)$.

3. Установить вид линии второго порядка, привести уравнение к каноническому виду и выписать основные элементы:

a. $x^2 + y^2 + 56x + 4y = 0$

b. $4x^2 + y^2 + 20x + 1 = 0$

c. $x^2 + y^2 - x + 4 = 0$

d. $x^2 + y^2 + 4x + 5y - 9 = 0$

e. $x^2 + 4y^2 - 16 = 0$

f. $2x^2 + 3y^2 + 16x + 12y - 6 = 0$

Вариант 2

1. Определить тип линии по уравнениям и построить в прямоугольной системе координат:

a. $(x - 6)^2 + (y + 1)^2 = 1$

b. $(x - 4)^2 + y^2 = 25$

c. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

d. $\frac{(x + 4)^2}{4} + \frac{(y - 2)^2}{36} = 1$

2. Составить уравнение окружности с центром в точке $C(-1;2)$ и радиусом $R=4$. Проверить, лежат ли на этой окружности точки $D(0;5)$, $A(-1;6)$, $B(2;3)$.

3. Установить вид линии второго порядка, привести уравнение к каноническому виду и выписать основные элементы:

- a. $x^2 + y^2 + 18x + 6y = 0$
- b. $5x^2 + y^2 + 20x - 4 = 0$
- c. $x^2 + y^2 - y - 6 = 0$
- d. $x^2 + y^2 + 7x + 8y - 3 = 0$
- e. $6x^2 + y^2 - 36 = 0$
- f. $5x^2 + 7y^2 + 30x + 14y - 6 = 0$

Вариант 3

1. Определить тип линии по уравнениям и построить в прямоугольной системе координат:

- a. $(x-3)^2 + (y+7)^2 = 4$
- b. $(x-5)^2 + y^2 = 9$
- c. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{36} = 1$
- d. $\frac{(x+3)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{25} = 1$

2. Составить уравнение окружности с центром в точке $C(0;5)$ и радиусом $R=1$. Проверить, лежат ли на этой окружности точки $D(0;6)$, $A(-1;6)$, $B(2;3)$.

3. Установить вид линии второго порядка, привести уравнение к каноническому виду и выписать основные элементы:

- a. $x^2 + y^2 + 8x + 16y = 0$
- b. $3x^2 + y^2 + 24x - 6 = 0$
- c. $x^2 + y^2 - x - 3 = 0$
- d. $x^2 + y^2 + 5x + 4y - 3 = 0$
- e. $x^2 + 9y^2 - 45 = 0$
- f. $6x^2 + 7y^2 + 36x + 28y - 1 = 0$

Вариант 4

1. Определить тип линии по уравнениям и построить в прямоугольной системе координат:

- a. $(x-1)^2 + (y+9)^2 = 9$
- b. $(x+7)^2 + y^2 = 4$
- c. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{49} = 1$
- d. $\frac{(x+1)^2}{36} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1$

2. Составить уравнение окружности с центром в точке $C(4;0)$ и радиусом $R=2$. Проверить, лежат ли на этой окружности точки $D(0;6)$, $A(-1;6)$, $B(6;0)$.

3. Установить вид линии второго порядка, привести уравнение к каноническому виду и выписать основные элементы:

- a. $x^2 + y^2 + 10x + 12y = 0$

- b. $7x^2 + y^2 + 28x - 2 = 0$
- c. $x^2 + y^2 - x - 6 = 0$
- d. $x^2 + y^2 + 7x + 9y - 3 = 0$
- e. $x^2 + 16y^2 - 64 = 0$
- f. $6x^2 + 3y^2 + 54x + 27y - 2 = 0$

Форма отчета: отчетная работа

Практическое занятие № 9

Тема: Составление уравнений гиперболы и параболы и их построение

Цель: закрепить усвоение теоретического материала по данной теме через решение упражнений; закрепить и проконтролировать умения находить канонические уравнения гиперболы и параболы, строить их.

Оборудование: тетрадь, ручка

Методические указания: ознакомиться с теоретическим материалом, рассмотреть примеры решения задач, решить задачи по вариантам (вариант назначается преподавателем)

Ход выполнения:

Теоретический материал и методические указания к выполнению заданий

Каноническое уравнение гиперболы

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1} \text{ - каноническое уравнение гиперболы, где } a \text{ – действительная полуось;}$$

b -мнимая полуось.

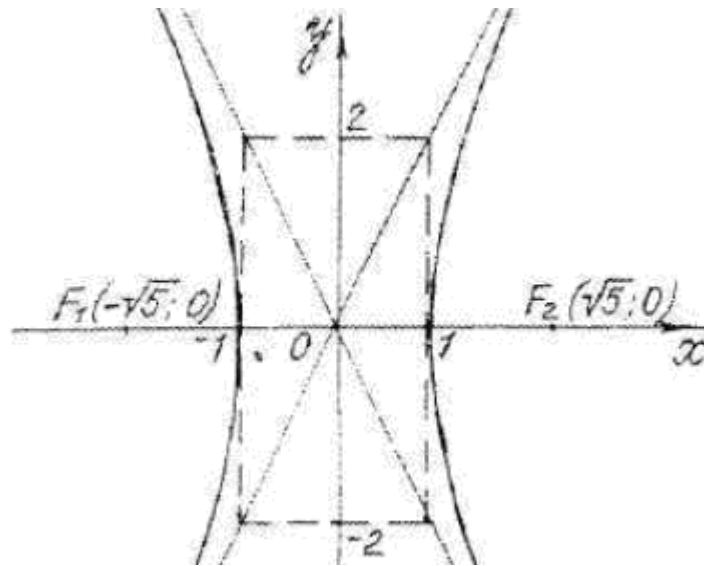
$$\boxed{\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1} \text{ - нормальное уравнение гиперболы,}$$

$$\boxed{y = \pm \frac{b}{a}x} \text{ - уравнение асимптот гиперболы.}$$

$$x^2 - \frac{y^2}{4} = 1,$$

Пример: Построить линию:

Каноническим уравнением гиперболы является уравнение $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, при этом фокусы гиперболы находятся в точках $F_1(-c; 0)$ и $F_2(c; 0)$, где $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Следовательно, $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ есть уравнение гиперболы с полуосями $a = 1$ и $b = 2$. Фокусы гиперболы находятся в точках $F_1(-\sqrt{5}; 0)$ и $F_2(\sqrt{5}; 0)$. Асимптотами гиперболы являются прямые $y = \pm \frac{b}{a}x$, то есть $y = \pm 2x$, которые можно построить как продолжение диагоналей прямоугольника со сторонами $x = 1, x = -1, y = 2, y = -2$. Центр гиперболы находится в начале координат.



Каноническое уравнение параболы

$$y^2 = 2px - \text{каноническое уравнение параболы.}$$

Парабола асимптот не имеет.

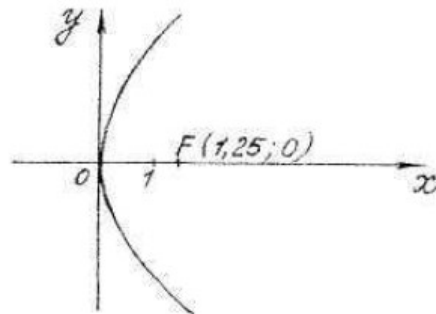
$$x = -\frac{p}{2} - \text{директриса параболы.} \quad F\left(\frac{p}{2}, 0\right) - \text{фокус параболы.}$$

$$(y - b)^2 = 2p(x - a) - \text{нормальное уравнение параболы (уравнение параболы со смещенной вершиной)}$$

Пример: Построить линию:

$$y^2 = 5x$$

Каноническим уравнением параболы, симметричной относительно оси Ox , является уравнение $y^2 = 2px$, при этом фокус параболы находится в точке $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$. Следовательно, $y^2 = 5x$ есть уравнение параболы, фокус которой находится в точке $F(1,25; 0)$



Пример: Привести к каноническому виду уравнение кривой второго порядка $5x^2 - 4y^2 + 16y - 36 = 0$

Решение: Для получения канонического уравнения выделим полный квадрат по переменной y и поделим полученное уравнение на свободный член:

$$5x^2 - 4(y^2 - 4y + 4) - 36 + 16 = 0, \quad 5x^2 - 4(y - 2)^2 = 20, \quad \frac{x^2}{4} - \frac{(y - 2)^2}{5} = 1$$

Итак, получено каноническое уравнение гиперболы с центром в точке $(0,2)$, $a = 2$ и $b = \sqrt{5}$.

Пример: Привести к каноническому виду уравнение кривой второго порядка $2y^2 - 4y + 2x - 1 = 0$.

Решение. Уравнение кривой преобразуется следующим образом:

$$2(y^2 - 2y + 1 - 1) + 2x - 1 = 0 \text{ или } 2(y - 1)^2 + 2x - 3 = 0. \text{ Отсюда } 2(y - 1)^2 = -2\left(x - \frac{3}{2}\right),$$

$$(y - 1)^2 = -\left(x - \frac{3}{2}\right),$$

имеем параболу, у которой вершина находится в точке $O\left(\frac{3}{2}, 1\right)$, параметр $p = -\frac{1}{2}$, а ветви параболы направлены в отрицательную сторону оси ОХ.

Вариант 1

1. Определить тип линии по уравнениям и построить в прямоугольной системе координат:

- a. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{36} = 1$

- b. $x^2 = 10y^2$

- c. $y = -(x - 3)^2$

- d. $\frac{(x + 3)^2}{9} - \frac{(y + 2)^2}{25} = 1$

2. Кривая второго порядка задана уравнением:

- 1) $x^2 - y^2 + 18x + 6y = 0$

- 2) $x^2 + y + 10x + 5 = 0$

- a. приведите уравнение к каноническому виду,

- b. найдите все характеристики данной кривой,

3. Составить канонические уравнения: а) гиперболы; б) параболы (A, B – точки, лежащие на кривой; a – большая (действительная) полуось; b – малая (мнимая) полуось; ε – эксцентриситет; $y = \pm kx$ – уравнения асимптот гиперболы, D – директриса кривой, $2c$ – фокусное расстояние).

- a) $a = 13, \varepsilon = \frac{14}{13};$

- б) $D: x = -4.$

Вариант 2

1. Определить тип линии по уравнениям и построить в прямоугольной системе координат:

- g. $x = -(y + 5)^2$

- h. $y^2 = 4x$

- i. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{49} = 1$

- j. $\frac{(x + 1)^2}{36} - \frac{(y - 3)^2}{9} = 1$

2. Кривая второго порядка задана уравнением:

- 1) $x^2 + 9y - 45 = 0$

- 2) $6x^2 - 7y^2 + 36x + 28y - 1 = 0$

- a. приведите уравнение к каноническому виду,

- b. найдите все характеристики данной кривой,

3. Составить канонические уравнения: а) гиперболы; б) параболы (A, B – точки, лежащие на кривой; a – большая (действительная) полуось; b – малая (мнимая) полуось; ε – эксцентриситет; $y = \pm kx$ – уравнения асимптот гиперболы, D – директриса кривой, $2c$ – фокусное расстояние).

а) $a = 7$, $\varepsilon = \frac{\sqrt{85}}{7}$; б) $D: x = 5$.

Вариант 3

1. Определить тип линии по уравнениям и построить в прямоугольной системе координат:

а. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1$
 б. $x = 8y^2$
 в. $x = -4(y + 5)^2$
 г. $\frac{(x - 4)^2}{9} - \frac{(y - 1)^2}{25} = 1$

2. Кривая второго порядка задана уравнением:

1) $6x + y^2 - 36 = 0$
 2) $5x^2 - 7y^2 + 30x + 14y - 6 = 0$

а. приведите уравнение к каноническому виду,

б. найдите все характеристики данной кривой,

3. Составить канонические уравнения: а) гиперболы; б) параболы (A , B – точки, лежащие на кривой; F – фокус; a – большая (действительная) полуось; b – малая (мнимая) полуось; ε – эксцентриситет; $y = \pm kx$ – уравнения асимптот гиперболы, D – директриса кривой, $2c$ – фокусное расстояние).

а) $b = 3$, $F(7, 0)$; б) $D: x = -7$.

Вариант 4

1. Определить тип линии по уравнениям и построить в прямоугольной системе координат:

а. $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$
 б. $y = 2(x - 4)^2$
 в. $x = -6y^2$
 г. $\frac{(x + 4)^2}{4} - \frac{(y - 2)^2}{36} = 1$

2. Кривая второго порядка задана уравнением:

1) $x^2 + 16y - 64 = 0$
 2) $6x^2 - 3y^2 + 54x + 27y - 2 = 0$

а. приведите уравнение к каноническому виду,

б. найдите все характеристики данной кривой,

3. Составить канонические уравнения: а) гиперболы; б) параболы (A , B – точки, лежащие на кривой; F – фокус; a – большая (действительная) полуось; b – малая (мнимая) полуось; ε – эксцентриситет; $y = \pm kx$ – уравнения асимптот гиперболы, D – директриса кривой, $2c$ – фокусное расстояние).

а) $b = 2\sqrt{10}$, $F(-11, 0)$; б) $D: x = -2$.

Форма отчета: отчетная работа

Практическое занятие № 10

Тема: Применение методов дифференциального исчисления: вычисление производных сложных функций

Цель: закрепить усвоение теоретического материала по данной теме через решение упражнений; закрепить умения находить производные функции первого порядка.

Оборудование: тетрадь, ручка

Методические указания: ознакомиться с теоретическим материалом, рассмотреть примеры решения задач, решить задачи по вариантам (вариант назначается преподавателем)

Ход выполнения:

Теоретический материал и методические указания к выполнению заданий

1. ПРАВИЛА И ФОРМУЛЫ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Если C - постоянная, $u = u(x)$, $v(x)$ - некоторые дифференцируемые функции, то справедливы следующие правила дифференцирования:

1) $(c)' = 0$

2) $(x)' = 1$;

3) $(u \pm v)' = u' \pm v'$;

4) $(cu)' = cu'$;

5) $(uv)' = u' \cdot v + u \cdot v'$;

6) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2} \quad (v \neq 0)$;

Все эти правила применяются к таблице производных

Таблица производных сложных функций

- | | |
|--|---|
| 1. $(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u' \quad (n \in R)$ | 2. $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2} \cdot u'$ |
| 3. $(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$ | 4. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$ |
| 5. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$ | 6. $(\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$ |
| 7. $(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$ | 8. $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u' \quad (u < 1)$ |
| 9. $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u' \quad (u < 1)$ | 10. $(\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$ |
| 11. $(\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$ | 12. $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u' \quad (a > 0, a \in R)$ |
| 13. $e^u = e^u \cdot u'$ | 14. $(\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u'$ |
| 15. $(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$ | |

Пример1: Найти производные функций:

а) $y = \cos x \cdot 3^x$; б) $y = 2 \ln x + \sin x$; в) $y = \frac{x^2 + \sqrt{x}}{\operatorname{tg} x}$.

Решение. а) Функция y – это произведение двух функций $f_1 = \cos x$ и $f_2 = 3^x$, поэтому по третьему правилу дифференцирования:

$$y' = (\cos x \cdot 3^x)' = (\cos x)' \cdot 3^x + \cos x \cdot (3^x)'$$

Из таблицы производных находим, что $(\cos x)' = -\sin x \cdot x'$, и так как $x' = 1$, то $(\cos x)' = -\sin x$; $(3^x)' = 3^x \ln 3 \cdot x' = 3^x \ln 3$.

$$\text{Значит, } y' = -\sin x \cdot 3^x + \cos x \cdot 3^x \ln 3 = 3^x (\ln 3 \cos x - \sin x).$$

б) $y' = (2 \ln x + \sin x)' = (2 \ln x)' + (\sin x)' = 2(\ln x)' + (\sin x)' = 2 \cdot \frac{1}{x} \cdot x' + \cos x \cdot x' = \frac{2}{x} + \cos x$

в) $y' = \left(\frac{x^2 + \sqrt{x}}{\operatorname{tg} x} \right)' = \frac{(x^2 + \sqrt{x})' \operatorname{tg} x - (x^2 + \sqrt{x})(\operatorname{tg} x)'}{\operatorname{tg}^2 x} = \frac{\left(2x + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) \operatorname{tg} x - (x^2 + \sqrt{x}) \frac{1}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg}^2 x}$

Пример 2. Найти производные функций:

а) $y = \operatorname{ctg}^2 x$; б) $y = 3 \sin^5 x$;

Решение. а) Функция y – это сложная функция $u = \operatorname{ctg} x$, $y = u^2$. Тогда по формуле

1 таблицы производных $y'_x = 2u \cdot u' = 2 \operatorname{ctg} x (\operatorname{ctg} x)'$, а по формуле 5 $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} \cdot x' = -\frac{1}{\sin^2 x}$. Таким образом, $y' = 2 \operatorname{ctg} x \cdot \left(-\frac{1}{\sin^2 x} \right)$.

б) Используем правило дифференцирования 3а: $y' = (3 \sin^5 x)' = 3(\sin^5 x)'$. Функция $\sin^5 x$ – сложная $u = \sin x$, $\sin^5 x = u^5$. Поэтому

$$y' = 3 \cdot 5u^4 = 15 \sin^4 x (\sin x)' = 15 \sin^4 x \cdot \cos x.$$

Пример 3. Найти производную функции $y = 3 \operatorname{tg}^2 5x$.

Решение. Применим формулу производной сложной функции. Если бы нужно было вычислить значение $3 \operatorname{tg}^2 5x$ при $x = x_0$, то сначала вычисляли бы $5x_0$, затем $\operatorname{tg} 5x_0$, затем полученный результат возвели бы в квадрат. То есть $3 \operatorname{tg}^2 5x$

является суперпозицией трех функций, поэтому и производная будет равна произведению трех производных

$$y' = 3(2 \operatorname{tg} 5x) \frac{1}{\cos^2 5x} 5 = 30 \frac{\operatorname{tg} 5x}{\cos^2 5x}.$$

Пример 4. Найти производную функции $y = \frac{2 - \sin^4 3x}{(5x^3 - 8x + 3)^2}.$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(2 - \sin^4 3x)'(5x^3 - 8x + 3)^2 - (2 - \sin^4 3x)((5x^3 - 8x + 3)^2)'}{(5x^3 - 8x + 3)^4} = \\ &= \frac{-4(\sin^3 3x)(\cos 3x)3(5x^3 - 8x + 3)^2 - (2 - \sin^4 3x)2(5x^3 - 8x + 3)(15x^2 - 8)}{(5x^3 - 8x + 3)^4} = \\ &= \frac{-12 \sin^3 3x \cdot \cos 3x (5x^3 - 8x + 3) - 2(15x^2 - 8)(2 - \sin^4 3x)}{(5x^3 - 8x + 3)^3} \end{aligned}$$

Вариант 1

1. Найти производные функций, используя правила дифференцирования:

- a. $y = x^2 - 7x$;
- b. $y = 6\sqrt{x} + 3/x$
- c. $y = (x^2 - 2)(x^7 + 4)$
- d. $y = \frac{x}{x^2 + 1}$

2. Найти производные функций:

$$a) y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} + 3;$$

$$б) y = 3x \cdot \sin 5x + 8;$$

$$в) y = (3 + \sin x)^2 \cdot x;$$

$$г) y = \frac{3x + 2}{x^2 - 2x + 5};$$

$$д) y = \arcsin \sqrt[3]{x};$$

$$е) y = \left(\frac{\sin x}{1 + \cos 2x} \right)^2;$$

$$ж) y = x \cdot (\cos \ln x + \sin \ln x);$$

$$з) y = 2(e^{\frac{x}{2}} - e^{\frac{x}{3}});$$

$$и) y = 0,92^{(x^3)};$$

$$к) y = (\sqrt{x})^{\operatorname{tg}^2 x}.$$

Вариант 2

1. Найти производные функций, используя правила дифференцирования:

- a. $y = -x^2 + 8x$;
- b. $y = -8\sqrt{x} - 1/x$
- c. $y = (x^2 + 1)(x^4 - 4)$
- d. $y = \frac{x^2}{3 - 4x}$

2. Найти производные функций:

$$a) y = \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{3x^3} + \sqrt[3]{x};$$

$$б) y = \frac{2}{2x^2} + 2;$$

$$е) y = \operatorname{arctg} \sqrt{4x^2 - 1};$$

$$ж) y = \frac{1 + x}{\sqrt{1 - x}};$$

$$е) y = (x + 5)^7 \cdot \sin 3x;$$

$$з) y = \sin^3 x + \cos^3 x;$$

$$д) y = 52^{\operatorname{ctg} x};$$

$$з) y = (x + 1) \cdot \arccos(x^2 + 1);$$

$$и) y = \ln \frac{x^5}{x^5 - 2};$$

$$к) y = (\operatorname{tg} x)^x.$$

Вариант 3

1. Найти производные функций, используя правила дифференцирования:

a. $y = x^3 + 4x^{100};$

b. $y = -2\sqrt{x} + 1/x$

c. $y = (x^2 + 3)(x^6 - 1);$

d. $y = \frac{x^3}{2x + 4}$

2. Найти производные функций:

a) $y = 5x - \frac{1}{x^2} - \sqrt[5]{x};$

б) $y = \operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x};$

в) $y = \sqrt[3]{(4 + 3x)^2};$

з) $y = x^2 \cdot \operatorname{ctg} 2x;$

д) $y = \cos^2 5x + 7x;$

e) $y = \cos^2 x - 2\ln \cos x;$

ж) $y = \frac{1}{(1 + \sin 4x)^3};$

з) $y = \arcsin^2 \frac{1}{x};$

и) $y = 7^{-x^2};$

к) $y = (\cos x)^{\sin x}.$

Вариант 4

1. Найти производные функций, используя правила дифференцирования:

a. $y = -2x^2 - 1/x;$

b. $y = 10\sqrt{x} + 5/x$

c. $y = (x^2 - 1)(x^4 + 2);$

d. $y = \frac{x^2}{x^2 - 1}$

2. Найти производные функций:

a) $y = 3x^5 - \frac{5}{x^5} + \sqrt[5]{5x + 2};$

б) $y = \arcsin(3x^3 + 4);$

в) $y = (x + 8) \cdot \operatorname{arctg} 4x^3;$

з) $y = \frac{2x^3 + 3x^2}{3x};$

д) $y = 4x \cdot (1 - 3\ln x);$

e) $y = \frac{5x + \sin 4x}{\cos 2x - 4};$

ж) $y = \ln \cos(5x^3 + 4);$

з) $y = (\operatorname{ctg} 3x + 1)^5;$

и) $y = 5^{\sin 2x};$

к) $y = (\cos x)^x.$

Форма отчета: отчетная работа

Практическое занятие № 11

Тема: Производные и дифференциалы высших порядков

Цель: закрепить усвоение теоретического материала по данной теме через решение упражнений; закрепить умения находить производные функции

различных порядков; закрепить умения применять производные для решения дифференциальных уравнений.

Оборудование: тетрадь, ручка

Методические указания: ознакомиться с теоретическим материалом, рассмотреть примеры решения задач, решить задачи по вариантам (вариант назначается преподавателем)

Ход выполнения:

Теоретический материал и методические указания к выполнению заданий

Производные высших порядков

Если производная $f'(x)$ функции $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и имеет в этой точке производную, то эта производная от $f'(x)$ называется **второй производной** (или **производной второго порядка**) функции $y = f(x)$ в точке x_0 и обозначается одним из следующих символов:

$$f''(x_0), \quad f^{(2)}(x_0), \quad y''(x_0), \quad y^{(2)}(x_0), \quad \frac{d^2 y}{dx^2}(x_0), \quad \frac{d^2 f}{dx^2}(x_0), \quad y''_{xx}.$$

Третья производная определяется как производная от второй производной и т. д. Если уже введено понятие $(n-1)$ -й производной и если $(n-1)$ -я производная имеет производную в точке x_0 , то указанная производная называется **n -й производной** (или **производной n -го порядка**) и обозначается

$$f^{(n)}(x_0), \quad y^{(n)}(x_0) \quad \text{или} \quad \frac{d^n f}{dx^n}(x_0), \quad \frac{d^n y}{dx^n}(x_0).$$

Таким образом, производные высших порядков определяются индуктивно по формуле:

$$y^{(n)}(x) = [y^{(n-1)}(x)]'.$$

Функция, имеющая n -ю производную в точке x_0 , называется n раз дифференцируемой в этой точке.

Пример. Найти $\frac{d^2 y}{dx^2}$ функции $y = \arcsin e^x$.

Решение. $y' = \frac{dy}{dx} = (\arcsin e^x)' = \frac{1}{\sqrt{1-e^{2x}}} \cdot (e^x)' = \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}.$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dy'}{dx} = \left(\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} \right)' = \frac{(e^x)' \sqrt{1-e^{2x}} - e^x (\sqrt{1-e^{2x}})'}{1-e^{2x}} = \frac{e^x \sqrt{1-e^{2x}} + e^x \cdot \frac{e^{2x}}{\sqrt{1-e^{2x}}}}{1-e^{2x}} = \frac{e^x}{(1-e^{2x})^2}$$

Вариант 1

1. Найти производные функций указанных порядков:

$$y = x^3 - 4x^2 + 5x - 1, \quad y''' - ?$$

$$y = \sin 2x, \quad y''' - ?$$

$$y = \cos^2 \frac{x}{4}, \quad y'' - ?$$

$$y = \frac{x+1}{2x+3}, \quad y'' - ?$$

2. Найти производную функции второго порядка в точке x_0 : $y = e^{-x^2}$, $x_0 = 0$.
3. Показать, что функция $y = 3 \operatorname{tg}(2x-1)$ удовлетворяет уравнению $y'' = 2yy'$.

Вариант 2

1. Найти производные функций указанных порядков:

$$y = x^4 - 2x^3 - 6x + 5, \quad y''' - ?$$

$$y = 3 \cdot 2^x, \quad y''' - ?$$

$$y = \sin^2 5x, \quad y'' - ?$$

$$y = \frac{2x-1}{2x+3}, \quad y'' - ?$$

2. Найти производную функции второго порядка в точке x_0 : $y = x + \sin 2x$, $x_0 = 0$.
3. Показать, что функция $y = 2e^{3x} - e^{-3x}$ удовлетворяет уравнению $yy'''' = y'y''$.

Вариант 3

1. Найти производные функций указанных порядков:

$$y = 3x^3 - 8x^2 - x + 3, \quad y''' - ?$$

$$y = \cos \frac{x}{3}, \quad y''' - ?$$

$$y = \operatorname{tg} 2x, \quad y'' - ?$$

$$y = \frac{6x^2}{3-x}, \quad y'' - ?$$

2. Найти производную функции второго порядка в точке x_0 : $y = x \ln 3x$, $x_0 = 1$.
3. Показать, что функция $y = \ln^2 x$ удовлетворяет уравнению $y'' = \frac{2}{x^2}(1 - \sqrt{y})$.

Вариант 4

1. Найти производные функций указанных порядков:

$$y = 6x^4 - 3x^2 + 5x - 2, \quad y''' - ?$$

$$y = e^{-x}, \quad y''' - ?$$

$$y = \operatorname{ctg} \frac{x}{2}, \quad y'' - ?$$

$$y = \frac{x^2}{1-4x}, \quad y'' - ?$$

2. Найти производную функции второго порядка в точке x_0 : $y = x^2 e^{-x}$, $x_0 = 0$.
3. Показать, что функция $y = 3^{-2x} + 3^{2x}$ удовлетворяет уравнению $y'' = 4 \ln^2 3 y$.

Форма отчета: отчетная работа

Практическое занятие № 12

Тема: Применение методов дифференциального исчисления: полное исследование функции. Построение графиков

Цель: закрепить усвоение теоретического материала по данной теме через решение упражнений; закрепить умения исследовать функции методами дифференциального исчисления, строить их графики.

Оборудование: тетрадь, ручка

Методические указания: ознакомиться с теоретическим материалом, рассмотреть примеры решения задач, решить задачи по вариантам (вариант назначается преподавателем)

Ход выполнения:

Теоретический материал и методические указания к выполнению заданий

При исследовании функций и построении их графиков рекомендуется использовать следующую схему:

1. Найти область определения функции.
2. Исследовать функцию на четность-нечетность.
3. Найти вертикальные асимптоты.
4. Исследовать поведение функции в бесконечности, найти горизонтальные и наклонные асимптоты.
5. Найти экстремумы и интервалы монотонности функции.
6. Найти интервалы выпуклости функции и точки перегиба.
7. Найти точки пересечения с осями координат и, возможно, некоторые дополнительные точки, уточняющие график.

Заметим, что исследование функции проводится одновременно с построением ее графика.

Исследовать функцию и построить ее график:

$$y = \frac{1+x^2}{1-x^2}.$$

РЕШЕНИЕ:

1. Область определения $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$, т.е. $x \neq \pm 1$.
2. Функция четная, т.к. $f(-x) = f(x)$, и ее график симметричен относительно оси ординат.

3. Вертикальные асимптоты могут пересекать ось абсцисс в точках $-1, 1$.

$\lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{1+x^2}{1-x^2} = -\infty$ и $\lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{1+x^2}{1-x^2} = +\infty$, то прямая $x=1$ есть вертикальная асимптота. В силу симметрии графика $f(x)$ $x=-1$ также вертикальная асимптота.

4. Поведение функции в бесконечности. Вычислим $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+x^2}{1-x^2} = -1$. В силу

четности также имеем $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1+x^2}{1-x^2} = -1$, т.е. прямая $y=-1$ – горизонтальная асимптота.

5. Экстремумы и интервалы монотонности.

Найдем $y' = \frac{2x(1-x^2) - (1+x^2)(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{4x}{(1-x^2)^2};$



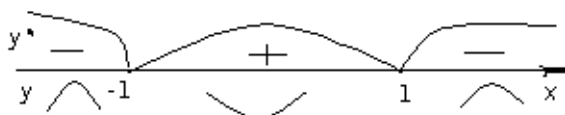
$y'=0$ при $x=0$ и y' не существует при $x=1, x=-1$.

Однако критической является только точка $x=0$.

$x=0$ – точка минимума и $f_{\min} = f(0) = 1$ – минимум функции.

6. Интервалы выпуклости и точки перегиба.

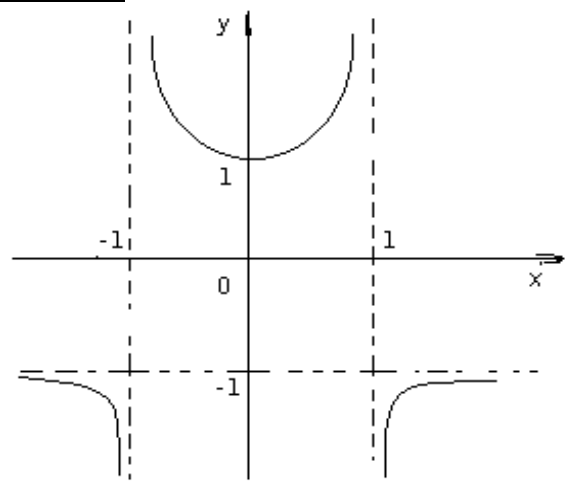
Найдем $y'' = \frac{4(1-x^2)^2 - 4x \cdot 2(1-x^2)(-2x)}{(1-x^2)^4} = \frac{4(1+3x^2)}{(1-x^2)^3}.$



Точек перегиба нет.

7. Точки пересечения с осями. $f(0)=1$, т.е. точка пересечения с осью ординат $(0,1)$. Уравнение $f(x)=0$ решений не имеет, следовательно, график функции не пересекает ось абсцисс.

Построим график функции.



Вариант 1

Исследовать заданные функции методами дифференциального исчисления, начертить их графики.

а $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5;$

б $y = \frac{x+1}{x}.$

в $y = x - \ln(x+2).$

Вариант 2

Исследовать заданные функции методами дифференциального исчисления, начертить их графики.

а $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 1;$

б $y = \frac{x}{x-1}.$

в $y = (2 + x^2) \cdot e^{-x^2}.$

Вариант 3

Исследовать заданные функции методами дифференциального исчисления, начертить их графики.

а $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 10;$

б $y = \frac{x-3}{x+2}.$

в $y = (x-1) \cdot e^{3x+1}.$

Вариант 4

Исследовать заданные функции методами дифференциального исчисления, начертить их графики.

а $y = x^3 + 6x^2 + 9x + 2;$

б $y = \frac{x+9}{x+4}.$

в $y = x \cdot e^{-x^2}.$

Форма отчета: отчетная работа

Практическое занятие № 13

Тема: Применение методов интегрального исчисления: интегрирование заменой переменной и по частям в неопределенном интеграле

Цель: закрепить усвоение теоретического материала по данной теме через решение упражнений; закрепить умения вычислять неопределенные интегралы по таблице интегралов и используя методы интегрирования

Оборудование: тетрадь, ручка

Методические указания: ознакомиться с теоретическим материалом, рассмотреть примеры решения задач, решить задачи по вариантам (вариант назначается преподавателем)

Ход выполнения:

Теоретический материал

Первообразная и неопределенный интеграл

Функция $F(x)$ называется первообразной по отношению к функции $f(x)$, если $F(x)$ дифференцируема и выполняется условие $F'(x)=f(x)$.

Основные правила интегрирования

1. Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла.

$$\int kf(x)dx = k \cdot \int f(x)dx$$

2. Интеграл от суммы двух или нескольких функций равен сумме интегралов.

$$\int (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$$

3. При интегрировании сложной функции перед интегралом выносится множитель $\frac{1}{a}$.

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a} \int f(ax+b)d(ax+b) = \frac{1}{a} F(ax+b) + C.$$

Таблица основных интегралов

1. $\int 0 \cdot dx = C$.

2. $\int dx = x + C$.

3. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$.

4. $\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C$.

5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$.

6. $\int e^x dx = e^x + C$.

7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.

8. $\int \cos x dx = \sin x + C$.

9. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$.

10. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$.

11. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$.

12. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C, a \neq 0$.

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$.

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$.

15. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C, .$

16. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln |x + \sqrt{x^2+a}| + C$.

Интегрирование подстановкой

Теорема 1. Если не удастся найти интеграл $\int f(x)dx$ непосредственно, то можно выбрать такую функцию $x = \varphi(t)$, удовлетворяющую условиям:

- 1) $\varphi(t)$ непрерывна при $t \in (\alpha; \beta)$, соответствующем интервалу $x \in (a; b)$,
- 2) дифференцируемая при $t \in (\alpha; \beta)$;
- 3) имеет обратную функцию $t = \varphi^{-1}(x)$, чтобы

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \quad | \quad t = \varphi^{-1}(x)$$

Интегрирование по частям

Теорема. Пусть функция $U = U(x)$ и $V = V(x)$ дифференцируемы на некотором интервале $(a; b)$. Пусть на $(a; b)$ функция $V(x) \cdot U'(x)$ имеет первообразную. Тогда на $(a; b)$ функция $U(x) \cdot V'(x)$ также имеет первообразную. При этом справедливо равенство:

$$\int u dv = u \cdot v - \int v \cdot du.$$

Большая часть интегралов, берущихся с помощью метода интегрирования по частям может быть разбита на группы.

1) К первой группе относятся интегралы, у которых подынтегральная функция содержит в качестве множителя одну из следующих функций:

$\ln x$; $\arcsin x$; $\arccos x$; $\arctg x$; $\operatorname{arctg} x$; $\ln^2 x$; $\ln \varphi(x)$; $\arcsin^2 x$; ...

при условии, что оставшаяся часть подынтегральной функции представляет собой производную известной функции.

Тогда за функцию $u(x)$ берут соответствующую из перечисленных.

2) Ко второй группе относятся интегралы вида

$$\int (ax + b)^n \cos \alpha x dx, \quad \int (ax + b)^n \cdot \sin \alpha x dx,$$

$$\int (ax + b)e^{\alpha x} dx, \quad \int (ax + b)^n A^{\alpha x} dx,$$

где a, b, α, A – некоторые постоянные числа, $A > 0, n \in \mathbb{N}$.

При этом в качестве $u(x)$ следует брать $(ax + b)^n$ и интегрировать по частям n раз.

Вариант 1

Найти неопределенные интегралы:

- 1) $\int \left(x + 5x^6 - 4 + \frac{4}{x} - \frac{3}{x^5} \right) dx.$
- 2) $\int \left(\cos 2x + 5 - 4 \sin x + \frac{2}{\sin^2 x} - \frac{3}{1+x^2} \right) dx.$

Найти неопределенные интегралы методом подстановки (заменой переменной):

- 3) $\int \sin^3 x \cdot \cos x dx;$
- 4) $\int \operatorname{ctg} x dx;$
- 5) $\int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x};$
- 6) $\int \frac{x^3}{\sqrt{8x^4 - 1}} dx.$

Найти неопределенные интегралы методом интегрирования по частям:

- 7) $\int x \cos x dx;$

$$8) \quad \int (x-3) \cdot e^x dx.$$

$$9) \quad \int x \cdot \ln 3x dx.$$

$$10) \quad \int \frac{x \cdot \cos x dx}{\sin^3 x};$$

Вариант 2

Найти неопределенные интегралы:

$$1) \quad \int \left(x^4 - 3 - 4x + \frac{2}{7x} - \frac{3}{x^{-5}} \right) dx.$$

$$2) \quad \int \left(\sin 5x - 4 + \frac{2}{4+x^2} + \frac{2}{x-4} - \frac{3}{\cos^2 x} \right) dx.$$

Найти неопределенные интегралы методом подстановки (заменой переменной):

$$3) \quad \int \frac{\arctg x dx}{x^2 + 1};$$

$$4) \quad \int 4x \cdot \sqrt[3]{x^2 + 8} dx;$$

$$5) \quad \int \frac{\sqrt{\tg x} dx}{\cos^2 x};$$

$$6) \quad \int x^3 \cdot \sqrt{5x^4 + 3} dx.$$

Найти неопределенные интегралы методом интегрирования по частям:

$$7) \quad \int x \sin x dx;$$

$$8) \quad \int x^2 \ln x dx;$$

$$9) \quad \int (8x - 3) \cdot \sin 5x dx.$$

$$10) \quad \int x^2 \cdot e^{x^3+1} dx.$$

Вариант 3

Найти неопределенные интегралы:

$$1) \quad \int \left(x^7 + 1 - 9x + \frac{2}{x+4} - \frac{3}{\cos^2 \frac{x}{4}} \right) dx.$$

$$2) \quad \int \left(\sin 3x + 5 \cos x - 4x + \frac{2}{\sqrt{9-x^2}} - \frac{3}{x^4} \right) dx.$$

Найти неопределенные интегралы методом подстановки (заменой переменной):

$$3) \quad \int \frac{\ln^5 x dx}{x};$$

$$4) \quad \int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx;$$

$$5) \quad \int \frac{e^x dx}{e^{2x} + 9};$$

$$6) \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx.$$

Найти неопределенные интегралы методом интегрирования по частям:

$$7) \int (x^2 - 4x + 1)e^{-x} dx;$$

$$8) \int (5x + 1) \ln x dx.$$

$$9) \int x \sin 2x dx;$$

$$10) \int \arctg x dx.$$

Вариант 4

Найти неопределенные интегралы:

$$1) \int \left(2^x + 5 - 2x + \frac{5}{4+x} - \frac{3}{e^x} \right) dx.$$

$$2) \int \left(\sin \frac{x}{8} + 5 \cos 6x - 2x + \frac{5}{\sqrt{4+x^2}} - \frac{3}{6^x} \right) dx.$$

Найти неопределенные интегралы методом подстановки (заменой переменной):

$$3) \int \frac{dx}{\arccos x \cdot \sqrt{1-x^2}};$$

$$4) \int \sqrt{\ln x} \cdot \frac{dx}{x}.$$

$$5) \int \frac{x}{\sqrt{1-2x^2}} dx.$$

$$6) \int \frac{(2x+3)dx}{(x^2+3x-1)^4};$$

Найти неопределенные интегралы методом интегрирования по частям:

$$7) \int x \cdot 2^x dx;$$

$$8) \int x \cdot \cos 2x dx.$$

$$9) \int (2x-1) \cdot e^{3x} dx;$$

$$10) \int (2x+1) \cdot \sin 3x dx.$$

Форма отчета: отчетная работа

Практическое занятие № 14

Тема: Применение методов интегрального исчисления: интегрирование рациональных и иррациональных функций

Цель: закрепить усвоение теоретического материала по данной теме через решение упражнений; закрепить умения вычислять неопределенные интегралы рациональных и иррациональных функций

Оборудование: тетрадь, ручка

Методические указания: ознакомиться с теоретическим материалом, рассмотреть примеры решения задач, решить задачи по вариантам (вариант назначается преподавателем)

Ход выполнения:

Теоретический материал

Интегрирование рациональных дробей

Задача интегрирования рациональной дроби сводится к умению интегрирования только правильных рациональных дробей, так как интегрирование целой части дроби (многочлена) не сложная. Если решена задача разложения правильной дроби на сумму простых дробей, то дальше надо уметь интегрировать простые дроби. Покажем, как интегрировать такие дроби.

$$\text{I. } \int \frac{A}{x-a} dx = A \int \frac{d(x-a)}{x-a} = A \cdot \ln |x-a| + C$$

$$\text{II. } \int \frac{A}{(x-a)^k} dx = A \int \frac{d(x-a)}{(x-a)^k} = A \int (x-a)^{-k} d(x-a) = \frac{A(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C = \frac{-A}{(k-1)(x-a)^{k-1}} + C \quad (k \in \mathbb{N}, k \geq 2)$$

$$\text{III. } \int \frac{Mx+F}{X^2+px+q} dx = \frac{M}{2} \ln |x^2+px+q| + \frac{F-M \cdot \frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} \arctg \frac{t}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + C$$

Любая рациональная дробь интегрируема.

Для этого необходимо выполнить следующие действия.

1) Если дробь является неправильной, выделить ее целую часть, т.е. представить в виде:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = T_{m-n}(x) + \frac{R_r(x)}{Q_n(x)},$$

где $T_{m-n}(x)$ и $R_r(x)$ – многочлены степени $m-n$ и r соответственно (причем $r < n$).

2) Разложить правильную рациональную дробь $\frac{P_r(x)}{Q_n(x)}$ на сумму простых дробей

3) Вычислить интегралы от многочлена $T_{m-n}(x)$ и каждой из простых дробей, полученных на шаге 2).

Интегрирование некоторых иррациональных функций

Не от всякой иррациональной функции интеграл выражается через элементарные функции. В дальнейшем будем стремиться отыскивать такие подстановки $t = \omega(x)$, которые привели бы подынтегральное выражение к рациональному виду. Если при этом функция $\omega(x)$ выражается через элементарные функции, то интеграл представится в конечном виде и в функции от x .

Назовем этот прием *методом рационализации подынтегрального выражения*.

1) Интеграл вида $\int \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+C}} dx$

Такие интегралы находят с помощью преобразований и замены, аналогичным преобразованиям и замены для нахождения интеграла от простой рациональной дроби III типа.

2) Подынтегральная функция содержит $\sqrt{a^2-x^2}$.

Тогда надо выполнить замену: $x = a \sin t; \left(t = \arcsin \frac{x}{a} \right) \quad dx = a \cos t dt$

$$\sqrt{a^2 - x^2} = a \cos t$$

Такая замена приводит интеграл от некоторого тригонометрического выражения.

3) Подынтегральная функция содержит $\sqrt{x^2 - a^2}$.

Тогда надо выполнить замену: $x = \frac{a}{\cos t}; \left(t = \arccos \frac{a}{x} \right) \quad dx = \frac{a \cdot \sin t}{\cos^2 t} dt$

$$\sqrt{x^2 - a^2} = a \tan t$$

4) Подынтегральная функция содержит $\sqrt{x^2 + a^2}$.

Тогда надо выполнить замену: $x = a \cdot \tan t; \left(t = \arctg \frac{x}{a} \right) \quad dx = \frac{a}{\cos^2 t} dt$

$$\sqrt{x^2 + a^2} = \frac{a}{\cos t}$$

5) Подынтегральная функция содержит $\sqrt[n]{ax + b}$:

Тогда надо выполнить замену: $x = \sqrt[n]{ax + b}$.

Вариант 1

Найдите интегралы от рациональных функций:

1. $\int \frac{7dx}{(5x+3)};$
2. $\int \frac{7dx}{(x+3)^6};$
3. $\int \frac{dx}{x^2 - 4x + 18};$
4. $\int \frac{2x+1}{x^2 + 6x - 1} dx;$
5. $\int \frac{dx}{(x+1)^3 + (x+1)}.$

Найдите интегралы от иррациональных функций:

1. $\int \frac{\sqrt{x} dx}{x - \sqrt[3]{x^2}};$
2. $\int \frac{\sqrt{x} dx}{1 - \sqrt[3]{x}};$
3. $\int \frac{\sqrt{x+2}}{x} dx;$
4. $\int \frac{x + \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[6]{x}}{x(1 - \sqrt[3]{x})} dx;$
5. $\int \frac{2x-5}{\sqrt{x^2 - 4x + 5}} dx.$

Вариант 2

Найдите интегралы от рациональных функций:

1. $\int \frac{7dx}{(6x-8)};$
2. $\int \frac{6dx}{(x-5)^3};$
3. $\int \frac{dx}{x^2 - 4x + 8}$
4. $\int \frac{6x+1}{x^2 - 8x + 25} dx$
5. $\int \frac{dx}{(x-6)^3 + (x-6)}.$

Найдите интегралы от иррациональных функций:

1. $\int \frac{x-1}{\sqrt{2x-1}} dx;$
2. $\int \frac{1}{(2-x)^2} \cdot \sqrt{\frac{2-x}{2+x}} dx;$
3. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2(x+1)}};$
4. $\int \frac{dx}{x \cdot (1 + \sqrt[3]{x})^3};$
5. $\int \frac{dx}{x + \sqrt[3]{x^2}}.$

Вариант 3

Найдите интегралы от рациональных функций:

1. $\int \frac{7dx}{(2x+13)};$
2. $\int \frac{4dx}{(x-9)^4};$
3. $\int \frac{dx}{x^2 - 10x + 8};$
4. $\int \frac{x+2}{x^2 + 3x + 5} dx;$
5. $\int \frac{3dx}{(x+2)^3 + (x+2)}.$

Найдите интегралы от иррациональных функций:

1. $\int \frac{dx}{x^{11} \cdot \sqrt{x^4 + 1}};$
2. $\int x^5 \cdot \sqrt[3]{(1+x^3)^2} dx;$
3. $\int \sqrt{x}(1 + \sqrt{x})^3 dx;$

$$4. \int \frac{dx}{\sqrt{1-2x-x^2}};$$

$$5. \int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x^3}} dx.$$

Вариант 4

Найдите интегралы от рациональных функций:

$$1. \int \frac{dx}{(3x+2)^4};$$

$$2. \int \frac{7dx}{(x-3)^7};$$

$$3. \int \frac{dx}{x^2+x+1};$$

$$4. \int \frac{x+1}{x^2+6x+5} dx;$$

$$5. \int \frac{dx}{(x-4)^3+(x-4)}.$$

Найдите интегралы от иррациональных функций:

$$1. \int \frac{3x-5}{\sqrt{x^2-4x+5}} dx;$$

$$2. \int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} dx;$$

$$3. \int x \cdot \sqrt[5]{x-2} dx;$$

$$4. \int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}};$$

$$5. \int \frac{\sqrt{x}dx}{1+\sqrt{x}}.$$

Форма отчета: отчетная работа

Практическое занятие № 15

Тема: Применение методов интегрального исчисления: интегрирование тригонометрических функций Универсальная подстановка

Цель: закрепить усвоение теоретического материала по данной теме через решение упражнений; закрепить умения вычислять неопределенные интегралы тригонометрических функций

Оборудование: тетрадь, ручка

Методические указания: ознакомиться с теоретическим материалом, рассмотреть примеры решения задач, решить задачи по вариантам (вариант назначается преподавателем)

Ход выполнения:

Теоретический материал

Интегрирование тригонометрических функций

1) Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x) dx$

Применим так называемую **универсальную тригонометрическую подстановку**

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t, \quad x = 2 \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \\ \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}. \end{aligned}$$

С помощью указанной подстановки интеграл $\int R(\sin x, \cos x) dx$ сводится к интегралу от рациональной функции

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2dt}{1+t^2}.$$

2) Интегралы вида $\int R(\sin x) \cdot \cos x dx$ или $\int R(\cos x) \cdot \sin x dx$.

а) $\int R(\sin x) \cdot \cos x dx$ приводится к $\int R(t) dt$ с помощью подстановки $\sin x = t$, $\cos x dx = dt$.

б) $\int R(\cos x) \cdot \sin x dx$ приводится к $\int (-R(t) dt)$, если $\cos x = t$, $\sin x dx = -dt$.

3) Интегралы вида $\int R(\operatorname{tg} x) dx$, $\int R(\sin^{2k} x, \cos^{2m} x) dx$.

Если подынтегральная функция зависит только от $\operatorname{tg} x$ или только от $\sin x$ и $\cos x$, входящих в четных степенях, то применяется подстановка

$$\operatorname{tg} x = t, \quad x = \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2} \cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1+t^2}; \quad \sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{t^2}{1+t^2}.$$

в результате которой получим интеграл от рациональной функции:

4) Интегралы вида $\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx$

а) m и n таковы, что по крайней мере одно из них нечетное число. Пусть для определенности n — нечетное. Тогда полагаем $n = 2p + 1$

$$\begin{aligned} \int \sin^m x \cdot \cos^n x dx &= \int \sin^m x \cdot \cos^{2p} x \cdot \cos x dx = \\ &= \int \sin^m x \cdot (1 - \sin^2 x)^p d \sin x = \{\sin x = t\} = \int t^m \cdot (1 - t^2)^p dt = \int R(t) dt. \end{aligned}$$

б) m и n — неотрицательные, четные числа. Полагаем $m = 2p$, $n = 2q$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x); \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

$$\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx = \int (\sin^2 x)^p \cdot (\cos^2 x)^q dx = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x\right)^p \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x\right)^q dx.$$

Возводя в степень и раскрывая скобки, получим интегралы, содержащие $\cos 2x$ как в четных, так и нечетных степенях. Интегралы с нечетными степенями $\cos 2x$ интегрируются как в случае а). Четные показатели степеней $\cos 2x$ снова понижаем по выше указанным формулам. Продолжая так поступать, получим в конце концов слагаемые вида $\int \cos kx dx$, которые легко интегрируются.

в) m и n – четные числа, но хотя бы одно из них отрицательное.

В этом случае следует сделать замену $\operatorname{tg} x = t$ (или $\operatorname{ctg} x = t$).

5) Интегралы вида $\int \cos mx \cdot \sin nx dx$; $\int \cos mx \cdot \cos nx dx$; $\int \sin mx \cdot \sin nx dx$ ($m \neq n$).

Чтобы проинтегрировать данные функции, достаточно применить тригонометрические формулы:

$$\cos mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2} [\cos(m+n)x + \cos(m-n)x]$$

$$\sin mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2} [\sin(m+n)x + \sin(m-n)x]$$

$$\sin mx \cdot \sin nx = \frac{1}{2} [\cos(m-n)x - \cos(m+n)x]$$

Вариант 1

Найдите интегралы от функций, содержащих тригонометрическое выражение:

1. $\int \cos(5-2x) dx$
2. $\int \frac{\sin 2x}{1 + \cos^2 x} dx$
3. $\int \frac{x^2}{\cos^2 x^3} dx$
4. $\int 5^{\sin x} \cos x dx$.

Найдите интегралы от функций, рационально зависящих от тригонометрических:

5. $\int \frac{dx}{1-2\cos x}$;
6. $\int \frac{\cos^5 x}{3-\sin x} dx$;
7. $\int \frac{dx}{2+6\sin^2 x}$;
8. $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^9 x} dx$;
9. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx$;
10. $\int \sin^4 x \cos^4 x dx$
11. $\int \cos 4x \cos 5x dx$

Вариант 2

Найдите интегралы от функций, содержащих тригонометрическое выражение:

1. $\int \frac{2^x}{\sin^2 2^x} dx$
2. $\int \frac{x^2}{\sin(1+x^3)} dx$
3. $\int \sqrt[5]{\sin^3 2x} \cos 2x dx$

$$4. \int \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx.$$

Найдите интегралы от функций, рационально зависящих от тригонометрических:

$$5. \int \frac{dx}{1 + 2 \sin x};$$

$$6. \int \frac{\sin^5 x}{3 - \cos x} dx;$$

$$7. \int \frac{dx}{2 \sin^2 x + 9 \cos^2 x};$$

$$8. \int \frac{\cos^3 x}{\sin^6 x} dx;$$

$$9. \int \frac{\sin^8 x}{\cos^{14} x} dx;$$

$$10. \int \sin^2 2x \cos^2 2x dx$$

$$11. \int \sin 5x \sin 6x dx$$

Вариант 3

Найдите интегралы от функций, содержащих тригонометрическое выражение:

$$1. \int \frac{e^{\operatorname{ctg} x} dx}{\sin^2 x}$$

$$2. \int 5^{\sin 2x} \cos 2x dx$$

$$3. \int \frac{\cos 2x}{25 + \sin^2 2x} dx$$

$$4. \int \frac{x^3}{\cos^2(x^4 - 1)} dx.$$

Найдите интегралы от функций, рационально зависящих от тригонометрических:

$$5. \int \frac{dx}{\sin x + \cos x};$$

$$6. \int \frac{\cos^5 x}{2 + \sin x} dx;$$

$$7. \int \frac{dx}{1 + 8 \cos^2 x};$$

$$8. \int \sin^2 x \cos^3 x dx;$$

$$9. \int \frac{\cos^6 x}{\sin^{10} x} dx;$$

$$10. \int \sin^4 3x dx$$

$$11. \int \sin 4x \cos 2x dx$$

Вариант 4

Найдите интегралы от функций, содержащих тригонометрическое выражение:

$$1. \int \sin(\sqrt{x} + 2) \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

$$2. \int \frac{\cos\left(\frac{1}{x} + 5\right)}{x^2} dx$$

$$3. \int \sqrt[3]{\cos^3 2x \sin 2x} dx$$

$$4. \int \frac{dx}{\sin^2(2x+5)}.$$

Найдите интегралы от функций, рационально зависящих от тригонометрических:

$$5. \int \frac{dx}{3 - \cos x};$$

$$6. \int \frac{\cos^3 x}{1 + \sin x} dx;$$

$$7. \int \frac{dx}{2 - \cos^2 x};$$

$$8. \int \sin^3 x \cos^7 x dx;$$

$$9. \int \frac{\sin^6 x}{\cos^{12} x} dx;$$

$$10. \int \cos^6 x dx$$

$$11. \int \cos 3x \cos 6x dx$$

Форма отчета: отчетная работа

Практическое занятие № 16

Тема: Применение методов интегрального исчисления: вычисление определенных интегралов

Цель: закрепить усвоение теоретического материала по данной теме через решение упражнений; закрепить умения вычислять определенные интегралы, применять методы интегрирования.

Оборудование: тетрадь, ручка

Методические указания: ознакомиться с теоретическим материалом, рассмотреть примеры решения задач, решить задачи по вариантам (вариант назначается преподавателем)

Ход выполнения:

Теоретический материал

Понятие определенного интеграла

Определение. Если интегральная сумма S_n имеет предел J , который не зависит ни от способа разбиения отрезка $[a, b]$ на частичные отрезки, ни от выбора точек c_i в них, то этот предел называют *определенным интегралом* от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ и обозначают $\int_a^b f(x) dx$.

$$\text{Таким образом, } \int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \cdot \Delta x_i,$$

где a — нижний предел интегрирования;

b — верхний предел интегрирования;

$f(x)$ — подынтегральная функция;

$f(x) dx$ — подынтегральное выражение;

x — переменная интегрирования; $[a, b]$ — отрезок интегрирования.

Основные свойства определенного интеграла

1. Определенный интеграл не зависит от обозначения переменной интегрирования:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(z)dz.$$

2. $\int_a^a f(x)dx = 0.$

3. Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла:

$$\int_a^b c \cdot f(x)dx = c \cdot \int_a^b f(x)dx, \quad \text{где } c = \text{const}.$$

4. Интеграл от суммы (разности) двух или нескольких интегрируемых на отрезке $[a, b]$ функций равен сумме (разности) интегралов от этих функций, то есть

$$\int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx.$$

5. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$

6. Если $a \leq c \leq b$, то $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$

7. Если функция $f(x) \geq 0$ на отрезке $[a, b]$, то $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ на этом отрезке.

8. Если на отрезке $[a, b]$ $f_1(x) \leq f_2(x)$, то $\int_a^b f_1(x)dx \leq \int_a^b f_2(x)dx.$

9. Производная определенного интеграла по переменному верхнему пределу равна подынтегральной функции

$$\left(\int_a^x f(t)dt \right)' = f(x).$$

Формула Ньютона–Лейбница

Пусть функция $y = f(x)$ интегрируема на $[a, b]$. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $F(x)$ — какая-либо ее первообразная на $[a, b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Данная формула позволяет вычислить определенный интеграл.

Пример. Вычислить интеграл $\int_0^3 \frac{dx}{9+x^2}.$

$$\int_0^3 \frac{dx}{9+x^2} = \frac{1}{3} \arctg \frac{x}{3} \Big|_0^3 = \frac{1}{3} \left(\arctg \frac{3}{3} - \arctg 0 \right) = \frac{1}{3} (\arctg 1 - \arctg 0) = \frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{4} - 0 \right) = \frac{\pi}{12}.$$

Интегрирование заменой переменной и по частям в определенном интеграле

Замена переменной в определенном интеграле

Теорема. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и пусть функция $x = \varphi(t)$ имеет непрерывную производную $\varphi'(t)$ на отрезке $[\alpha; \beta]$, область значений этой функции – отрезок $[a; b]$, то есть $a \leq \varphi(t) \leq b$ для $x \in [\alpha; \beta]$, причем $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$.

Тогда справедливо равенство:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt.$$

Пример.

$$\begin{aligned} \int_4^9 \frac{dx}{1+\sqrt{x}} &= \left| \begin{array}{l|l|l} x=t^2; & dx=2tdt \\ \sqrt{x}=t & \frac{x}{t} \Big| \frac{4}{2} \Big| \frac{9}{3} \end{array} \right| = \int_2^3 \frac{2tdt}{1+t} = 2 \int_2^3 \frac{(1+t)-1}{1+t} dt = 2 \int_2^3 \left(1 - \frac{1}{1+t} \right) dt = \\ &= 2 \left(t - \ln|t+1| \right) \Big|_2^3 = 2((3 - \ln 4) - (2 - \ln 3)) = 2 + \ln \frac{9}{16} \end{aligned}$$

При замене переменной часто бывает удобно пользоваться не подстановкой $x = \varphi(t)$ для перехода к новой переменной t , а наоборот, обозначать буквой t некоторую функцию от x и принимать ее за новую переменную: $t = \psi(x)$. В этом случае новые пределы α и β определяют сразу по формулам $\alpha = \psi(a)$, $\beta = \psi(b)$.

Интегрирование по частям в определенном интеграле

Теорема. Пусть функции $u(x)$ и $V(x)$ имеют непрерывные производные на $[a; b]$. Тогда справедливо равенство:

$$\int_a^b u(x) \cdot V'(x) dx = u(x) \cdot V(x) \Big|_a^b - \int_a^b V(x) \cdot u'(x) dx$$

Пример. $\int_0^{\pi/2} x \cos x dx.$

Решение. Положим $u = x$, $dv = \cos x dx$, тогда $du = dx$, $v = \int dv = \int \cos x dx = \sin x$.

Применяя формулу, получим

$$\int_0^{\pi/2} x \cos x dx = x \sin x \Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin x dx = \frac{\pi}{2} + \cos x \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{2} - \cos 0 = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Пример. $\int_0^1 \operatorname{arctg} t dt = \left| \begin{array}{l|l} u = \operatorname{arctg} t, & dv = t dt \\ du = \frac{dt}{1+t^2}, & v = \frac{t^2}{2} \end{array} \right| = \frac{t^2}{2} \operatorname{arctg} t \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{t^2 dt}{2(1+t^2)} =$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1+t^2-1}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \int_0^1 dt + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} t \Big|_0^1 + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t \Big|_0^1 =$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

Вариант 1

Вычислить определенные интегралы:

1. $\int_2^3 \ln x dx;$

2. $\int_2^3 \frac{x dx}{x^2 + 1};$
3. $\int_0^{\pi} (2x + 3) \cdot \cos x dx;$
4. $\int_0^1 \frac{\sqrt{\arctg x}}{1 + x^2} dx;$
5. $\int_0^1 \left(x^8 - 4x + 2 - \frac{8}{x^4} - \frac{1}{x-1} \right) dx.$
6. $\int_{\pi/2}^{\pi} \left(\sin \frac{x}{2} - 6 - 4 \cos(2x) + \frac{2}{3x} - \frac{3}{x^2} \right) dx.$
7. $\int_1^2 \left(7^x + 5 - 2x + \frac{5}{5-x} - 4x^9 \right) dx;$
8. $\int_0^{\pi} \left(\sin 7x + 8 \cos \frac{x}{8} - 2x^2 + \frac{5}{16+x^2} - \frac{3}{e^{-x}} \right) dx.$

Вариант 2

Вычислить определенные интегралы:

1. $\int_2^3 x \cdot e^x dx;$
2. $\int_0^1 x(2x+1)^{35} dx;$
3. $\int_1^2 x \ln x dx;$
4. $\int_1^3 x \sqrt{1+2x^2} dx.$
5. $\int_1^2 \left(x^3 + 5 - 4x + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^4} \right) dx;$
6. $\int_0^{\pi/2} \left(\cos x + \sin(5x) - x^9 + \frac{2}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} \right) dx.$
7. $\int_1^2 \left(2^x + 5 - 2x + \frac{5}{4+x} - \frac{3}{e^x} \right) dx;$
8. $\int_{\pi/3}^{\pi} \left(\sin \frac{x}{8} + 5 \cos 6x - 2x + \frac{5}{\sqrt{4+x^2}} - \frac{3}{6^x} \right) dx.$

Вариант 3

Вычислить определенные интегралы:

- 11) $\int_0^{\pi} x^2 \cos x dx;$

- 12) $\int_{\pi/2}^{\pi} \sin^3 x \cdot \cos x dx;$
- 13) $\int_0^1 (x-3)e^{-2x} dx.$
- 14) $\int_1^2 \frac{x^3}{\sqrt{8x^4-1}} dx.$
- 15) $\int_2^3 \left(x + 5x^6 - 4 + \frac{4}{x} - \frac{3}{x^5} \right) dx;$
- 16) $\int_{\pi/2}^{\pi} \left(\cos 2x + 5 - 4 \sin x + \frac{2}{\sin^2 x} - \frac{3}{1+x^2} \right) dx.$
- 17) $\int_1^2 \left(x^{-1} + 4 - 8x + \frac{1}{1-x} - \frac{3}{x^3} \right) dx.$
- 18) $\int_0^{\pi} \left(4^x + 7 \sin 7x - 2 \cos x + \frac{5}{\cos^2 x} - \frac{3}{9+x^2} \right) dx;$

Вариант 4

Вычислить определенные интегралы:

- 11) $\int_{\pi/2}^{\pi} x \sin x dx;$
- 12) $\int_1^2 \frac{\arctg x dx}{x^2+1};$
- 13) $\int_1^2 x^2 \ln x dx;$
- 14) $\int_1^2 x^3 \cdot \sqrt{5x^4+3} dx;$
- 15) $\int_0^1 \left(x^4 - 3 - 4x + \frac{2}{7x} - \frac{3}{x^{-5}} \right) dx;$
- 16) $\int_0^{\pi} \left(\sin 5x - 4 + \frac{2}{4+x^2} + \frac{2}{x-4} - \frac{3}{\cos^2 x} \right) dx.$
- 17) $\int_0^1 \left(x^7 + 1 - 9x + \frac{2}{x+4} - \frac{3}{\cos^2 \frac{x}{4}} \right) dx;$
- 18) $\int_0^{\pi/2} \left(\sin 3x + 5 \cos x - 4x + \frac{2}{\sqrt{9-x^2}} - \frac{3}{x^4} \right) dx.$

Форма отчета: отчетная работа

Практическое занятие № 17

Тема: Применение методов интегрального исчисления: вычисление площадей фигур с помощью определенных интегралов Применение методов

интегрального исчисления: вычисление площадей фигур с помощью определенных интегралов

Цель: закрепить усвоение теоретического материала по данной теме через решение упражнений; закрепить умения применять определенные интегралы для нахождения площадей плоских фигур, длин кривых и объемов тел вращения.

Оборудование: тетрадь, ручка

Методические указания: ознакомиться с теоретическим материалом, рассмотреть примеры решения задач, решить задачи по вариантам (вариант назначается преподавателем)

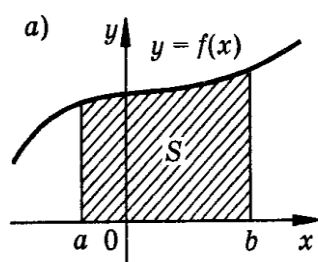
Ход выполнения:

Теоретический материал

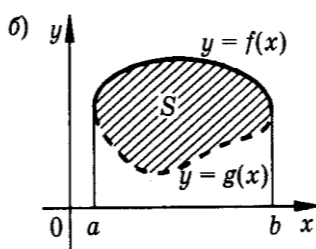
Пусть функция $f(x)$ непрерывна и неотрицательна на отрезке $[a; b]$. Тогда площадь соответствующей КРИВОЛИНЕЙНОЙ ТРАПЕЦИИ находится по формуле Ньютона-Лейбница:

$$S = \int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

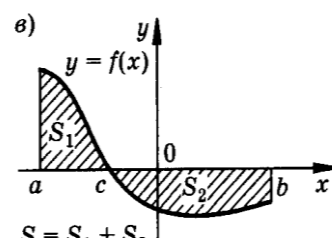
Вычисление площади плоской фигуры



$$S = \int_a^b f(x) dx$$



$$S = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$$



$$S = S_1 + S_2$$

$$S_1 = \int_a^c f(x) dx; \quad S_2 = -\int_c^b f(x) dx$$

Пример: Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = x^2$ и $y = 2 - x^2$.

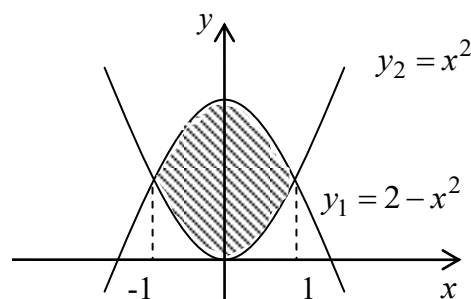
Решение: Найдем координаты точек пересечения линий:

$$\begin{cases} y = x^2, \\ y = 2 - x^2 \end{cases} \Rightarrow x^2 = 2 - x^2 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$x_1 = -1; \quad x_2 = 1 \Rightarrow a = -1; \quad b = 1.$$

$$S = \int_{-1}^1 ((2 - x^2) - x^2) dx = \int_{-1}^1 (2 - 2x^2) dx = 2 \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx =$$

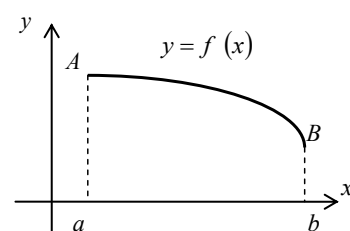
$$= 2 \left(x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^1 = 2 \left(1 - \frac{1}{3} - \left(-1 - \frac{(-1)^3}{3} \right) \right) = \frac{8}{3};$$



Нахождения длины дуги кривой

Для кривой, заданной в декартовых координатах уравнением $y = f(x)$ $x \in [a; b]$ длина дуги находится по формуле

$$l_{AB} = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$



Пример Вычислить длину дуги кривой $y = \ln \sin x$ от $x = \frac{\pi}{3}$ до $x = \frac{\pi}{2}$.

Решение. Дифференцируя уравнение кривой, найдем $y' = \operatorname{ctg} x$. Используя формулу, получим:

$$L = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + (y')^2} dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 x} dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x} = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \ln \sqrt{3}.$$

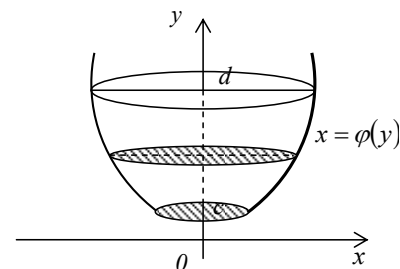
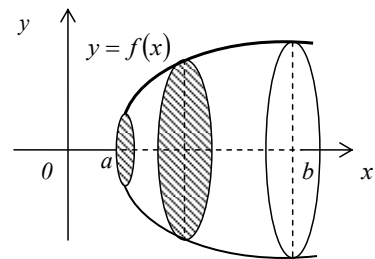
Нахождение объема тел вращения

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $x \in [a; b]$. Тогда объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции $y = f(x)$, снизу Ox , определяется формулой:

$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

Если криволинейная трапеция ограничена графиком непрерывной функции $x = \varphi(y)$ и прямыми $x = 0$, $y = c$, $y = d$ ($c < d$), то объем тела, образованного вращением этой трапеции вокруг оси Oy , по аналогии с формулой

$$(20), \text{ равен: } V_y = \pi \int_c^d \varphi^2(y) dy.$$

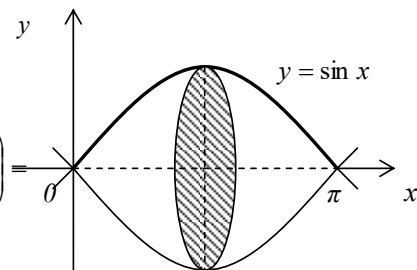


Пример: Вычислить объем тела, полученного вращением фигуры $y = \sin x$; $y = 0$; $0 \leq x \leq \pi$, вокруг оси Ox .

Решение:

В условиях нашей задачи $y = \sin x$, $a = 0$, $b = \pi$.

$$\begin{aligned} V_x &= -\pi \int_0^\pi \sin^2 x dx = \left\{ \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \right\} = \pi \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{\pi}{2} \left(\int_0^\pi dx - \int_0^\pi \cos 2x dx \right) \\ &= \frac{\pi}{2} \left(x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) \Big|_0^\pi = \frac{\pi}{2} \left(\left(\pi - \frac{1}{2} \sin 2\pi \right) - \left(0 - \frac{1}{2} \sin 0 \right) \right) = \frac{\pi}{2} \cdot \pi = \frac{\pi^2}{2}. \end{aligned}$$



Вариант 1

1. Вычислите площади фигур, ограниченных указанными линиями:

- $y = x^2$, $y = 2x + 3$;
- $y = 1/2x^2 - x + 1$, $y = -1/2x^2 + 3x + 6$;
- $y = -x^2/2$, $y = x - 3/2$.

2. Вычислить:

- длину дуги кривой $y = \ln x$ от точки с абсциссой $x_1 = \frac{3}{4}$ до точки $x_2 = 2,4$.

- длину дуги кривой $y = x^2 - 1$, отсеченной осью Ox .

3. Вычислить объем тела, полученного при вращении вокруг оси Ox фигуры, ограниченной заданными линиями:

- a. $y=4-x^2$, $y=0$;
- b. $y=4x-x^2$, $y=0$.

Вариант 2

1. Вычислите площади фигур, ограниченных указанными линиями:

- a. $y=2x^2$, $y=x/2$;
- b. $y=1/2x^2+x+2$, $y=-1/2x^2-3x+7$;
- c. $y=4x^2$, $y=-x$.

2. Вычислить:

- a. длину дуги кривой $y = \frac{1}{3}x\sqrt{x}$ от $x_1 = 0$ до $x_2 = 12$.
- b. длину дуги полукубической параболы $y = \sqrt{(x-2)^3}$ от точки $A(2; 0)$ до точки $B(6; 8)$.

3. Вычислить объем тела, полученного при вращении вокруг оси OX фигуры, ограниченной заданными линиями:

- a. $y=4x-x^2$, $y=3$;
- b. $y=4-x^2$, $y=-2x+4$.

Вариант 3

1. Вычислите площади фигур, ограниченных указанными линиями:

- a. $y=4x-x^2$, $y=x$;
- b. $y=1/3x^2-3x+2$, $y=-2/3x^2-2x+4$;
- c. $y=3x^2-2$, $y=x^2$.

2. Вычислить:

- a. длину дуги кривой $y = \frac{1}{3}(x-3)\sqrt{x}$ между точками пересечения её с OX.
- b. длину дуги кривой $y = x^{3/2}$, $0 \leq x \leq 4$.

3. Вычислить объем тела, полученного при вращении вокруг оси OX фигуры, ограниченной заданными линиями:

- a. $x^2+y^2=4$, $x=1$;
- b. $y=2x-x^2$, $y=0$.

Вариант 4

1. Вычислите площади фигур, ограниченных указанными линиями:

- a. $y=x^2-2x+1$, $y=-x+3$;
- b. $y=2x^2+6x-3$, $y=-x^2+x+5$;
- c. $y=x^2-x-3$, $y=x$.

2. Вычислить:

- a. длину дуги кривой $y = 1 - \ln \cos x$ в пределах от $x_1 = 0$ до $x_2 = \frac{\pi}{4}$.
- b. длину дуги кривой $y = 2\sqrt{x}$, $\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{1}{8}$.

3. Вычислить объем тела, полученного при вращении вокруг оси ОХ фигуры, ограниченной заданными линиями:

a. $x^2+y^2=9$, $y=3-x$;

b. $y=2-x^2/2$, $y=0$.

Форма отчета: отчетная работа

Практическое занятие № 18

Тема: Определение сходимости числовых рядов

Цель: научиться определять сходимость числовых рядов

Оборудование: тетрадь, ручка

Методические указания: ознакомиться с теоретическим материалом, рассмотреть примеры решения задач

Ход выполнения:

Числовые ряды

Числовым рядом называется выражение

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

Пример $\sum_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + 1 + 4 + \dots$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$

Знакоположительный ряд – ряд, состоящий из положительных членов (предыдущие примеры)

Знакопеременный ряд – ряд, знаки членов которого строго чередуются.

Пример $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \dots$

Сходимость рядов

Частичной суммой ряда называется сумма первых n членов ряда

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

Числовой ряд называется **сходящимся**, если $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ (т.е. предел равен конечному числу). Если $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$, то ряд называется **расходящимся**.

Знакопеременный ряд называется **абсолютно сходящимся**, если сходится ряд, состоящий из его абсолютных величин.

Если знакопеременный ряд сходится, а ряд из его абсолютных величин расходится, то знакопеременный ряд называется **условно сходящимся**.

Признаки сходимости

1. Признак Даламбера. (для знакоположительных рядов)

Пусть дан числовой знакоположительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \quad \begin{cases} l > 1, & \text{ряд расходится} \\ l < 1, & \text{ряд сходится} \\ l = 1, & \text{требуется дополнительные исследования} \end{cases}$$

Пример. Используя признак Даламбера исследовать на сходимость

$$\text{знакоположительный ряд } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{n!}$$

Решение:

$$a_n = \frac{10^n}{n!}, \quad a_{n+1} = \frac{10^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{10 \cdot 10^n}{n!(n+1)}$$

$$\text{Найдем отношение } \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{10 \cdot 10^n}{n!(n+1)} \cdot \frac{n!}{10^n} = \frac{10}{n+1}$$

$$\text{Найдем предел } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10}{n+1} = 0 < 1, \text{ значит, по признаку}$$

Даламбера, ряд сходится.

Ответ: ряд сходится.

2. Признак сравнения. (для знакоположительных рядов)

Пусть даны два знакоположительных ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ такие, что $a_n < b_n$, тогда

$$1) \text{ если } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ расходится, то расходится и } \sum_{n=1}^{\infty} b_n ;$$

$$2) \text{ если } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ сходится, то сходится и } \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

3. Признак Лейбница (для знакочередующихся рядов):

Если для знакопеременного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ выполняются условия

а) члены ряда монотонно убывают по абсолютной величине, т.е.

$$|a_1| > |a_2| > |a_3| > \dots$$

б) общий член стремится к нулю, т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$,

то ряд **сходится** и сумма ряда не превосходит по абсолютному значению абсолютной величины первого члена.

Если хотя бы одно условие не выполняется, то ряд **расходится**.

Пример. С помощью признака Лейбница исследовать на сходимость

знакочередующийся ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{4n+7}$$

Решение:

а) $|a_1| = \frac{1}{11}, |a_2| = \frac{1}{15}, |a_3| = \frac{1}{19} \dots$

Очевидно, что $|a_1| > |a_2| > |a_3| > \dots$. Т.е. члены ряда монотонно убывают по абсолютной величине.

б)
$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4n+7} = \left\langle \frac{1}{\infty} \right\rangle = 0$$

Так как оба условия выполняются, то по признаку Лейбница данный знакочередующийся ряд сходится.

Ответ: ряд сходится.

Степенной ряд

Степенной ряд имеет вид:
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

Областью сходимости степенного ряда называется совокупность всех x , при которых этот ряд сходится.

Эта область является симметричным интервалом относительно $x = 0$ на числовой оси $(-R, R)$, где R – **радиус сходимости степенного ряда**, который вычисляется по формуле:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}$$

Пример. Найти область сходимости степенного ряда
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{15^n}$$

Решение:

$$a_n = \frac{1}{15^n}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{15^{n+1}} = \frac{1}{15^n \cdot 15}$$

$(1+x)^m =$	$1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + \dots$	$(-1, 1)$
$\arctg x =$	$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots$	$(-1, 1)$
$\ln(1+x) =$	$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots$	$(-1, 1]$

Пример. Разложить функцию в ряд Маклорена $y = e^{5x}$

Решение:

Для функции $y = e^x$ имеем разложение:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots,$$

тогда для функции $y = e^{5x}$ разложение получим из предыдущего, заменив x на $5x$:

$$e^{5x} = 1 + 5x + \frac{(5x)^2}{2!} + \frac{(5x)^3}{3!} + \dots + \frac{(5x)^n}{n!} + \dots \text{ или}$$

$$e^{5x} = 1 + 5x + \frac{5^2 x^2}{2!} + \frac{5^3 x^3}{3!} + \dots + \frac{5^n x^n}{n!} + \dots.$$

Ответ: $e^{5x} = 1 + 5x + \frac{5^2 x^2}{2!} + \frac{5^3 x^3}{3!} + \dots + \frac{5^n x^n}{n!} + \dots.$

Форма отчета: отчетная работа

Практическое занятие № 19

Тема: Анализ функционального ряда

Цель: закрепить усвоение теоретического материала по данной теме

Оборудование: тетрадь, ручка

Методические указания: ознакомиться с теоретическим материалом, рассмотреть примеры решения задач

Ход выполнения:

Тригонометрический ряд Фурье

Тригонометрическим рядом Фурье для функции $f(x)$ в промежутке изменения аргумента $0 \leq x \leq 2\pi$ (или $-\pi \leq x \leq \pi$) называется ряд вида

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

где

$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots, b_0, b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ – коэффициенты Фурье.

Функция $f(x)$ – периодическая с периодом 2π

Тригонометрический ряд достаточно рассматривать только для значений x в промежутке $0 \leq x \leq 2\pi$ (или $-\pi \leq x \leq \pi$), т.к. за пределами указанного промежутка значений аргумента величина каждого члена ряда периодически повторяется.

Разложение функции, представляющей сложное периодическое движение, в тригонометрический ряд имеет важное значение в прикладных науках. Такое разложение в тригонометрический ряд называется гармоническим анализом.

Чтобы разложить периодическую функцию $f(x)$ с периодом 2π в тригонометрический ряд, нужно найти коэффициенты этого ряда, которые вычисляются по формулам:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

Пример.

Разложить функцию в ряд Фурье $y = x$ на промежутке $0 \leq x \leq 2\pi$

Решение.

Разложение в ряд Фурье на интервале $0 \leq x \leq 2\pi$ имеет вид:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x dx = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^{2\pi} = 2\pi$$

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \left(x \frac{\sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2} \right) \Big|_0^{2\pi} = \\
 &= \frac{1}{\pi} \left(2\pi \frac{\sin n2\pi}{n} + \frac{\cos n2\pi}{n^2} - \left(\frac{1}{n^2} \right) \right) = 0 \\
 b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi} \left(-x \frac{\cos nx}{n} + \frac{\sin nx}{n^2} \right) \Big|_0^{2\pi} = \\
 &= \frac{1}{\pi} \left(-2\pi \frac{\cos n2\pi}{n} + \frac{\sin n2\pi}{n^2} - 0 \right) = -\frac{2}{n}
 \end{aligned}$$

Окончательно, получаем:
$$x = \pi + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2}{n} \sin nx$$

Примечание:
 $\cos(\pi n) = (-1)^n \quad \cos(2\pi n) = 1 \quad \sin(\pi n) = 0$

Ответ.
$$x = \pi + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2}{n} \sin nx$$

Форма отчета: отчетная работа

Практическое занятие № 20

Тема: Решение дифференциальных уравнений первого порядка

Цель: закрепить усвоение теоретического материала по данной теме через решение упражнений; закрепить умения решать дифференциальные уравнения первого порядка.

Оборудование: тетрадь, ручка

Методические указания: ознакомиться с теоретическим материалом, рассмотреть примеры решения задач, решить задачи по вариантам (вариант назначается преподавателем)

Ход выполнения:

Теоретический материал

Обыкновенные дифференциальные уравнения

Дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение, в которое, кроме независимой переменной x и искомой функции y , входит либо производная y' :

$$F(x, y, y') = 0,$$

либо дифференциалы dx и dy :

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0.$$

Удобнее рассматривать уравнение, разрешенное относительно y' :

$$y' = f(x, y). \quad (1)$$

Задачей Коши для дифференциального уравнения первого порядка называют задачу, состоящую в отыскании решения $y = \varphi(x)$ уравнения (1), удовлетворяющего заданному начальному условию $y(x_0) = y_0$.

Решение задачи Коши называют *частным решением* дифференциального уравнения.

Уравнения с разделяющимися переменными

Уравнение вида

$$y' = f(x) \cdot g(y) \quad (2)$$

называется уравнением с разделяющимися переменными.

Алгоритм решения дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными

1. Перепишем уравнение (2) в виде $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$.
2. Разделим переменные, т. е. в правую часть уравнения «перенесем» все выражения, содержащие x , а в левую часть – содержащие y .
3. В результате получим уравнение $\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$,

где коэффициент при dx – функция только от x , при dy – функция только от y .

4. Интегрируя обе части этого уравнения:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C.$$

5. Получим его общее решение:

Пример. Решить задачу Коши: $3y' = y^{-2}e^x$, $y(2) = 3$.

Решение. Запишем уравнение в виде $3\frac{dy}{dx} = \frac{e^x}{y^2}$. Умножив обе части уравнения на

$$y^2 dx, \text{ получим } 3\frac{dy}{dx} y^2 dx = \frac{e^x}{y^2} y^2 dx, \quad 3y^2 dy = e^x dx.$$

$$\text{Интегрируем: } \int 3y^2 dy = \int e^x dx + C, \quad y^3 = e^x + C.$$

Общее решение уравнения: $y = \sqrt[3]{e^x + C}$.

Подставим в общее решение начальные значения $y(2) = 3$, получим значение C :

$$1 = \sqrt[3]{e^0 + C}, \quad 1 = 1 + C, \quad C = 0.$$

Тогда частное решение уравнения: $y = \sqrt[3]{e^x} = e^{\frac{x}{3}}$.

Однородные дифференциальные уравнения

Дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ называется **однородным**, если $f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)$ при любых $x, y, \lambda \neq 0$.

Подстановка

$$y = ux, \quad y' = u'x + u,$$

где $u = u(x)$ – новая неизвестная функция, приводит однородное уравнение к уравнению с разделяющимися переменными.

Пример. Найти общее решение уравнения $x^2 y' = y^2 + xy + x^2$.

Решение. Приведем уравнение к виду $y' = f(x, y)$, для этого разделим обе части уравнения на x^2 :

$$y' = \frac{y^2}{x^2} + \frac{y}{x} + 1,$$

получим, что $f(x, y) = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{y}{x} + 1$.

Покажем, что уравнение однородное. Очевидно,

$$f(\lambda x, \lambda y) = \left(\frac{\lambda y}{\lambda x}\right)^2 + \frac{\lambda y}{\lambda x} + 1 = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{y}{x} + 1 = f(x, y).$$

Следовательно, уравнение однородное и для сведения его решения к решению уравнения с разделяющимися переменными надо сделать подстановку (1), после этого уравнение примет вид:

$$u'x + u = u^2 + u + 1.$$

После приведения подобных членов получим

$$u'x = u^2 + 1, \quad u' = \frac{u^2 + 1}{x}.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными: $\frac{du}{dx} = \frac{u^2 + 1}{x}$. Разделим

переменные, умножая обе части на $\frac{dx}{u^2 + 1}$: $\frac{du}{u^2 + 1} = \frac{dx}{x}$.

Интегрируя, получим

$$\arctgu = \ln|x| + C_1.$$

Произвольную постоянную C_1 удобно записать в виде: $C_1 = \ln|C|$. Тогда последнее уравнение примет вид:

$$\arctgu = \ln|x| + \ln|C|, \quad \arctgu = \ln|Cx|, \quad u = \operatorname{tg} \ln|Cx|.$$

Сделаем обратную замену: $\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \ln|Cx|$, $y = x \operatorname{tg} \ln|Cx|$.

Линейные неоднородные уравнения первого порядка

Уравнение вида

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

называется линейным.

Для нахождения его решения искомую функцию y представляют в виде

$$y = u(x)v(x),$$

тогда $y' = u'v + uv'$.

Подставим y и y' в уравнение (2):

$$u'v + uv' + P(x)uv = Q(x),$$

после группировки имеем

$$u'v + u(v' + P(x)v) = Q(x).$$

Найдем такую функцию v , чтобы выражение в скобках обратилось в нуль, т. е.

$$v' + P(x)v = 0.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Пусть $v = v_0(x)$ – его решение (при вычислении $v_0(x)$ не надо вводить произвольную постоянную). Тогда в силу (2.5) и (2.6) функция u должна удовлетворять уравнению

$$u'v_0(x) = Q(x).$$

Это уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{du}{dx}v_0(x) = Q(x), \quad du = \frac{Q(x)}{v_0(x)}dx, \quad u(x) = \int \frac{Q(x)}{v_0(x)}dx + C.$$

Следовательно, общим решением уравнения (2) будет

$$y = \left(\int \frac{Q(x)}{v_0(x)}dx + C \right) v_0(x).$$

Пример. Найти общее решение уравнения $y' - y = e^{2x}$.

Решение. Дано линейное уравнение, в котором $P(x) = -1$, $Q(x) = e^{2x}$.

Подставляя в него $y = uv$, $y' = u'v + uv'$, получим

$$u'v + uv' - uv = e^{2x}, \quad u'v + u(v' - v) = e^{2x}.$$

Приравнявая нулю выражение, стоящее в скобках, получим:

$$v' - v = 0, \text{ т. е. } \frac{dv}{dx} = v, \quad \frac{dv}{v} = dx, \quad \int \frac{dv}{v} = \int dx, \quad \ln v = x, \quad v = e^x.$$

Если $v = e^x$, то функция u должна удовлетворять уравнению $u' \cdot e^x = e^{2x}$, т. е.

$$u' = e^x, \quad \frac{du}{dx} = e^x, \quad du = e^x dx, \quad \int du = \int e^x dx + C, \quad u = e^x + C.$$

Следовательно, общим решением данного уравнения будет

$$y = (e^x + C)e^x = e^{2x} + Ce^x.$$

Вариант 1

1. Решить дифференциальные уравнения:

а) $(1 - 3x)y' = 1 + y^2$;

б) $y' \cos x - y \sin x = 0$;

в) $y' - 4xy = 1$;

г) $\frac{yy'}{x} + e^y = 0$;

д) $xy' \sin(y/x) + x = y \sin(y/x)$;

е) $y' = 4 + (y/x) + (y/x)^2$.

2. Найдите решение дифференциального уравнения, удовлетворяющего начальному условию: $y' \cos x - 2y \sin x = 2$, $y(0) = 2$.

3. Найдите решение дифференциального уравнения, удовлетворяющего начальному условию: $(1 + x^3)y' - 3x^2y = 1$, $y(1) = 0$.

Вариант 2

1. Решить дифференциальные уравнения:

а) $y'tgx - y = 0$;

б) $y(2 + x)y' = 3$;

в) $y' + \sin xy = e^{-\cos x} \sin 2x$;

г) $(1 + e^{2x})y^2 dy = e^x dx$;

д) $xy + y^2 = (2x^2 + xy)y'$;

е) $y' = (y/x) + \cos(y/x)$.

2. Найдите решение дифференциального уравнения, удовлетворяющего начальному условию: $xy' + y = \frac{2x}{1+x^2}$, $y(1) = 0$.
3. Найдите решение дифференциального уравнения, удовлетворяющего начальному условию: $y' - 4xy = x$, $y(0) = \frac{3}{4}$.

Вариант 3

1. Решить дифференциальные уравнения:
 - а) $y' = e^{2x-y}$;
 - б) $\ln y dy + y(1+x^2)dx = 0$
 - в) $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$;
 - г) $\frac{dx}{x(y-1)} + \frac{dy}{y(x+2)} = 0$;
 - д) $xy' = xe^{y/x} + y$.
 - е) $xy' \ln(y/x) = x + y \ln(y/x)$.
2. Найдите решение дифференциального уравнения, удовлетворяющего начальному условию: $xy' + 2y = \frac{1}{x}$, $y(1) = 3$.
3. Найдите решение дифференциального уравнения, удовлетворяющего начальному условию: $y' \sin x - y \cos x = 1$, $y(0) = 2$.

Вариант 4

1. Решить дифференциальные уравнения:
 - а) $ydy + e^x dx = 0$;
 - б) $x^2 dy + (2-3y)dx = 0$;
 - в) $y' + y = \frac{e^{-x}}{1+x^2}$;
 - г) $y \ln y + y' \sqrt{x+1} = 0$;
 - д) $xyy' = y^2 + 2x^2$;
 - е) $y' = \frac{x+y}{x-y}$.
2. Найдите решение дифференциального уравнения, удовлетворяющего начальному условию: $xy' - 3y = x^4 e^x$, $y(1) = e$.
3. Найдите решение дифференциального уравнения, удовлетворяющего начальному условию: $y' - y \cos x = e^{\sin x} \sin 2x$, $y(\frac{\pi}{2}) = 3$.

Форма отчета: задачи

Практическое занятие № 21

Тема: Решение дифференциальных уравнений второго порядка

Цель: закрепить усвоение теоретического материала по данной теме через решение упражнений; закрепить умения решать дифференциальные уравнения второго порядка.

Оборудование: тетрадь, ручка

Методические указания: ознакомиться с теоретическим материалом, рассмотреть примеры решения задач, решить задачи по вариантам (вариант назначается преподавателем)

Ход выполнения:

Теоретический материал

Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Это уравнения вида $y'' + py' + qy = 0$, где p и q – некоторые действительные числа.

Заменив в нем y'' на k^2 , y' – на k и y – на $k^0 = 1$, получим $k^2 + pk + q = 0$ – характеристическое уравнение.

Вид общего решения уравнения (1) зависит от корней характеристического уравнения

Корни $k^2 + pk + q = 0$	Общее решение $y'' + py' + qy = 0$
k_1, k_2 – действительные числа и $k_1 \neq k_2$	$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$
k_1, k_2 – действительные числа и $k_1 = k_2 = k$	$y = e^{kx} (C_1 + C_2 x)$
k_1, k_2 – комплексные числа: $k_1 = \alpha + i\beta$, $k_2 = \alpha - i\beta$	$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

Пример. Найти общее решение дифференциального уравнения:
а) $4y'' - 4y' + y = 0$; б) $y'' - 3y' = 0$; в) $y'' - 2y' + 10y = 0$.

Решение.

Для каждого из данных уравнений составляем характеристическое уравнение и решаем его. По виду полученных корней записываем общее решение дифференциального уравнения (см. табл.):

а) $4k^2 - 4k + 1 = 0$, корни $k_1 = k_2 = \frac{1}{2}$ – действительные и равные, поэтому общее решение уравнения $y = e^{x/2} (C_1 + C_2 x)$;

б) $k^2 - 3k = 0$, $k(k - 3) = 0$, корни $k_1 = 0$, $k_2 = 3$ – действительные и различные, поэтому общее решение уравнения $y = C_1 e^{0 \cdot x} + C_2 e^{3x} = C_1 + C_2 e^{3x}$;

в) $k^2 - 2k + 10 = 0$, корни $k_{1,2} = 1 \pm 3i$ – комплексно-сопряженные, поэтому общее решение уравнения $y = e^x (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$.

Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Это уравнения вида $y'' + py' + qy = f(x)$, его решение: $y_{o.n.} = y_{o.o.} + y_{ч.н.}$.

Структура частного решения определяется правой частью $f(x)$ уравнения

№	Вид $f(x)$	Структура $y_{ч.н.}$
1.	$f(x) = P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$, $P_n(x)$ – многочлен степени n	$y_{ч.н.} = x^r Q_n(x) =$ $= x^r (A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_n)$,

		где $r = \begin{cases} 0, & k_{1,2} \neq 0, \\ 1, & k_1 = 0. \end{cases}$
2.	$f(x) = P_n(x)e^{mx}$	$y_{ч.н.} = x^r Q_n(x)e^{mx},$ где $r = \begin{cases} 0, & k_{1,2} \neq m, \\ 1, & k_1 = m, \\ 2, & k_{1,2} = m. \end{cases}$
3.	$f(x) = M \cos bx + N \sin bx$	$y_{ч.н.} = x^r (A \cos bx + B \sin bx),$ где $r = \begin{cases} 0, & k_1 \neq ib, \\ 1, & k_1 = ib. \end{cases}$

В таблице $a_0, a_1, \dots, a_n, m, b, M, N$ – известные числа, k_1, k_2 – корни характеристического уравнения, $A_0, A_1, \dots, A_n, A, B$ – неизвестные коэффициенты, которые находятся путем подстановки $y_{ч.н.}$ в исходное уравнение (*метод неопределенных коэффициентов*).

Пример. Определить и записать структуру частного решения $y_{ч.н.}$ уравнения $y'' + 36y = f(x)$ по виду функции $f(x)$, если а) $f(x) = 4xe^{-x}$; б) $f(x) = 2 \sin 6x$.

Решение.

Находим корни характеристического уравнения: $k^2 + 36 = 0, k_{1,2} = \pm 6i$.

а) Так как $f(x) = 4xe^{-x} = P_1(x)e^{mx}$, где $P_1(x) = 4x, m = -1$ (случай 2 в табл. 2.2), то частное решение имеет вид $y_{ч.н.} = x^0 Q_1(x)e^{-x} = (Ax + B)e^{-x}$.

$r = 0$, т. к. среди корней характеристического уравнения нет равных -1 .

б) Поскольку $f(x) = 2 \sin 6x = 0 \cdot \cos 6x + 2 \sin 6x$ (случай 3 в табл. 2.2): $M = 0, N = 2, b = 6$, то $y_{ч.н.} = x(A \cos 6x + B \sin 6x)$,

множитель x появился потому, что $6i$ является корнем характеристического уравнения.

Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка

1. Если дифференциальное уравнение имеет вид $y'' = f(x)$, то оно решается последовательным интегрированием.

2. Если в запись уравнения не входит функция $y(x)$, т.е. оно имеет вид $G(x, y', y'') = 0$, то такое уравнение можно решить, найдя вспомогательную функцию $z = y', z' = y''$.

Пример: Решить уравнение $xy'' + y' = 0$.

Решение: Положим $z = y', z' = y''$.

Исходное уравнение примет вид $xz' + z = 0$.

Это уравнение первого порядка с разделяющимися переменными.

$$\frac{dz}{z} = -\frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dz}{z} = -\int \frac{dx}{x}$$

$$z = C_1 / x$$

Возвращаясь к первоначальной функции, получаем уравнение

$$y' = C_1 / x$$

$$dy = C_1 dx / x$$

$$y = C_1 \ln|x| + C_2$$

3. Если в запись уравнения не входит переменная x , т.е. оно имеет вид $G(y, y', y'') = 0$, то такое уравнение можно решить, найдя вспомогательную функцию $z = z(y) = y'$, $z'z = y''$.

Пример: Решить уравнение $2yy'' = (y')^2 + 1$.

Решение: Положим $z = z(y) = y'$, $z'z = y''$. Исходное уравнение примет вид $2yzz' = z^2 + 1$.

Это уравнение первого порядка с разделяющимися переменными.

$$\frac{2zdz}{z^2 + 1} = \frac{dy}{y}$$

$$\int \frac{d(z^2 + 1)}{z^2 + 1} = \int \frac{dy}{y}$$

$$\ln(z^2 + 1) = \ln|y| + C, \quad C = \ln C_1,$$

$$\ln(z^2 + 1) = \ln|y| + \ln C_1,$$

$$\ln(z^2 + 1) = \ln|yC_1|,$$

$$(z^2 + 1) = |yC_1|,$$

$$z^2 = C_1 y - 1,$$

$$z = \pm \sqrt{C_1 y - 1}$$

Возвращаясь к первоначальной функции, получаем уравнение

$$y' = \pm \sqrt{C_1 y - 1}$$

$$\pm \frac{dy}{\sqrt{C_1 y - 1}} = dx$$

$$\pm \sqrt{C_1 y - 1} = \frac{C_1}{2} (x + C_2)$$

$$\pm \int \frac{dy}{\sqrt{C_1 y - 1}} = \int dx$$

$$C_1 y - 1 = \frac{C_1^2}{4} (x + C_2)^2$$

Вариант 1

1. Найти общее решение дифференциальных уравнений:

$$1) y'' - 2y' + 10y = 0, \quad 2) y'' - 2y' = 0; \quad 3) y'' + y' - 2y = 0.$$

2. Записать структуру частного решения линейного неоднородного уравнения по виду правой части.

$$2y'' - 7y' + 3y = f(x) \quad \text{а) } f(x) = (2x + 1)e^{3x}; \quad \text{б) } f(x) = \cos 3x$$

3. Найти общее решение дифференциальных уравнений:

$$1) y'' + 36y = xe^x; \quad 2) y'' + 4y' + 20y = 4\cos 4x - 52\sin 4x.$$

4. Найти общее решение дифференциального уравнения:
 1) $y''' = \sin x$; 2) $y''' = e^{2x}$.
5. Найти решение дифференциального уравнения, допускающего понижение порядка.

1) $x^3 \cdot y'' + x^2 y' = 1$, 2) $y \cdot y'' + (y')^2 = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

Вариант 2

1. Найти общее решение дифференциальных уравнений:
 1) $4y'' - 8y' + 3y = 0$; 2) $y'' - 3y' = 0$; 3) $y'' - 2y' + 10y = 0$.
2. Записать структуру частного решения линейного неоднородного уравнения по виду правой части:

$2y'' - 9y' + 4y = f(x)$ а) $f(x) = -2e^{4x}$; б) $f(x) = 5\cos 4x$.

3. Найти общее решение дифференциальных уравнений:
 1) $y'' + 6y' + 9y = 4e^{2x}$; 2) $y'' + 5y' = 2\cos 3x + 4\sin 3x$.
4. Найти общее решение дифференциального уравнения:
 1) $y''' = \frac{1}{x}$; 2) $y'' = \frac{1}{\sin^2 2x}$.
5. Найти решение дифференциального уравнения, допускающего понижение порядка.

1) $xy'' - y' = x^2 e^x$, 2) $2y \cdot y'' = (y')^2$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

Вариант 3

1. Найти общее решение дифференциальных уравнений:
 1) $y'' + y' - 6y = 0$, 2) $y'' + 9y' = 0$; 3) $y'' - 4y' + 20y = 0$.
2. Записать структуру частного решения линейного неоднородного уравнения по виду правой части.

$y'' - y' + y = f(x)$ а) $f(x) = 10\cos x$; б) $f(x) = 7x + 2$.

3. Найти общее решение дифференциальных уравнений:
 1) $y'' - 12y' + 40y = 2e^{6x}$; 2) $y'' - 14y' + 49y = 144\sin 7x$.
4. Найти общее решение дифференциального уравнения:
 1) $y'' = \frac{1}{\cos^2 x}$; 2) $y'' = \cos x + e^{-x}$
5. Найти решение дифференциального уравнения, допускающего понижение порядка.

1) $x^2 y'' + xy' = 1$, 2) $y'' = -\frac{1}{(2y^3)}$, $y(0) = \frac{1}{2}$, $y'(0) = \sqrt{2}$.

Вариант 4

1. Найти общее решение дифференциальных уравнений:
 1) $y'' - 4y' = 0$; 2) $y'' + 2y' + 17y = 0$; 3) $y'' - y' - 12y = 0$.

2. Записать структуру частного решения линейного неоднородного уравнения по виду правой части.
 $y'' + 49y = f(x)$ а) $f(x) = x^3 + 4x$; б) $f(x) = 3\sin 7x$.
3. Найти общее решение дифференциальных уравнений:
 1) $y'' + 2y' + y = 2e^{-x}$; 2) $4y'' - 4y' = y = -25\cos x$.
4. Найти общее решение дифференциального уравнения:
 1) $y'' = \frac{1}{x^2 + 1}$; 2) $y'' = 4\cos 2x$.
5. Найти решение дифференциального уравнения, допускающего понижение порядка.
 1) $xy'' = y' + x^2$, 2) $y'' = 2 - y$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 2$.

Форма отчета: задачи

Практическое занятие № 22

Тема: Решение задач с использованием дифференциальных уравнений

Цель: закрепить усвоение теоретического материала по данной теме через решение упражнений; закрепить умения решать задачи с использованием дифференциальных уравнений.

Оборудование: тетрадь, ручка

Методические указания: ознакомиться с теоретическим материалом, рассмотреть примеры решения задач, решить задачи по вариантам (вариант назначается преподавателем)

Ход выполнения:

Теоретический материал

Пример. Найти линию, проходящую через точку $M(2;3)$ и обладающую тем свойством, что отрезок любой ее касательной, заключенный между координатными осями делится пополам в точке ее касания.

Решение. Пусть уравнение искомой кривой $y = y(x)$. Известно, что уравнение касательной к ней в любой точке $N(x; y)$ имеет вид

$$Y - y = y'(X - x),$$

где X, Y - текущие координаты касательной. Обозначим точки пересечения касательной с осями координат через A и B .

Полагая, $Y=0$ найдем абсциссу точки A пересечения касательной с осью абсцисс

$$X_A = x - \frac{y}{y'}.$$

Очевидно, что $X_B = 0$. Согласно условию задачи точка N является серединой отрезка AB и поэтому $X_N = \frac{X_B + X_A}{2}$, то есть $x = \frac{1}{2} \left(x - \frac{y}{y'} \right)$ или

$xy' + y = 0$. Полученное уравнение есть дифференциальное уравнение относительно искомой функции $y = y(x)$. Разделив в нем переменные, получим

$$\frac{dy}{y} + \frac{dx}{x} = 0. \text{ Тогда } \ln|y| + \ln|x| = \ln|C|, \text{ то есть } xy = C.$$

Следовательно, указанным в условии задачи свойствам обладает любая гипербола полученного семейства. Остается выделить ту из них, которая проходит через точку $M(2;3)$. Так как подстановка значений $x = 2$, $y = 3$ в общий интеграл дает $C = 6$, то искомая гипербола имеет уравнение $xy = 6$.

Пример. Тело, имеющее в начальный момент времени ($t=0$) температуру $T(0) = T_0 = 100^\circ$, охлаждается в воздушной среде до температуры $T_1 = 60^\circ$ в течение $t_1 = 20$ мин. Найти время, за которое тело охладится до температуры 30° , если известно, что температура воздуха 20° , а скорость охлаждения тела пропорциональна разности между температурой тела и температурой воздуха.

Решение. Обозначим температуру тела в любой момент времени t через $T=T(t)$. Т.к. скорость охлаждения тела $\frac{dT}{dt}$ пропорциональна разности между температурой тела T и температурой воздуха 20° , то получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{dT}{dt} = K(T - 20). \quad (1.7)$$

Здесь K – коэффициент пропорциональности. Уравнение (1.7) является дифференциальным уравнением первого порядка с разделяющимися переменными, поэтому решаем его по указанной выше схеме.

Разделив переменные, получим

$$\frac{dT}{T - 20} = K dt.$$

Интегрируя, находим:

$$\int \frac{dT}{T - 20} = \int K dt \Rightarrow \ln|T - 20| = Kt + \ln|C| \Leftrightarrow \ln|T - 20| = \ln e^{Kt} + \ln|C| \Rightarrow T - 20 = Ce^{Kt},$$

или

$$T = Ce^{Kt} + 20. \quad (1.8)$$

Равенство (1.8) является общим решением уравнения (1.7). Найдем частное решение, удовлетворяющее условию $T(0) = 100^\circ$:

$$100 = Ce^{K \cdot 0} + 20 \Leftrightarrow C = 80.$$

Итак, частным решением является функция

$$T = 80e^{Kt} + 20. \quad (1.9)$$

Найдем числовое значение постоянной e^K . Для этого воспользуемся условием, что $T(20)=60$:

$$60 = 80e^{K \cdot 20} + 20 \Leftrightarrow e^{20K} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^K = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{20}}.$$

Таким образом, частное решение (1.9) можно записать так:

$$T = 80\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}} + 20. \quad (1.10)$$

В задаче требуется определить время, за которое тело охладится до температуры 30° .

Положив в равенстве (1.9) $T=30^\circ$, найдем:

$$30 = 80 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{20}} + 20 \Leftrightarrow \frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{20}} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2} \right)^3 = \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{20}} \Leftrightarrow \frac{t}{20} = 3 \Leftrightarrow t = 60 \text{ (мин)}.$$

Итак, тело охладится до температуры 30° в течение одного часа.

С помощью подстановки $u(x) = ax + by(x) + d$ к уравнениям с разделяющимися переменными приводятся и дифференциальные уравнения вида $y' = f(ax + by + d)$, $b \neq 0$.

Вариант 1

1. Для данного дифференциального уравнения найти кривую, проходящую через точку А.
 - a. $xy' = \sqrt{x^2 + y^2} + y$, $M(1;0)$.
 - b. $x^2 dy = (xy + y^2) dx$, $M(1;-1)$.
2. Найти линию, проходящую через точку $M(-2;1)$ и обладающую тем свойством, что отрезок любой ее касательной, заключенный между координатными осями делится пополам в точке ее касания.
3. Найти линию, проходящую через точку $A(1;0)$ и обладающую тем свойством, что отрезок, отсекаемый любой её касательной на оси ОУ, равен длине радиуса-вектора точки касания.
4. Тело, имеющее в начальный момент времени ($t=0$) температуру $T(0) = T_0 = 120^\circ$, охлаждается в воздушной среде до температуры $T_1 = 70^\circ$ в течение $t_1 = 25$ мин. Найти время, за которое тело охладится до температуры 36° , если известно, что температура воздуха 30° , а скорость охлаждения тела пропорциональна разности между температурой тела и температурой воздуха.

Вариант 2

1. Для данного дифференциального уравнения найти кривую, проходящую через точку А.
 - a. $xy^2 y' = x^3 + y^3$, $M(1;3)$.
 - b. $(x^2 - 3y^2) dx + 2xy dy = 0$, $M(2;1)$.
2. Найти линию, проходящую через точку $M(1;1)$ и обладающую тем свойством, что отрезок любой ее касательной, заключенный между координатными осями делится пополам в точке ее касания.
3. Найти линию, проходящую через точку $A(2;3)$, если ордината точки пересечения касательной с прямой $X=1$ в три раза больше ординаты точки касания.
4. Тело, имеющее в начальный момент времени ($t=0$) температуру $T(0) = T_0 = 100^\circ$, охлаждается в воздушной среде до температуры $T_1 = 50^\circ$ в течение $t_1 = 15$ мин. Найти время, за которое тело охладится до температуры 25° , если известно, что температура воздуха 10° , а скорость охлаждения тела пропорциональна разности между температурой тела и температурой воздуха.

Вариант 3

1. Для данного дифференциального уравнения найти кривую, проходящую через точку А.

a. $(x^2 + y^2)dx - 2xydy = 0$, $M(2;1)$.

b. $xy' = y(1 - \ln \frac{y}{x})$, $M(1; \frac{1}{\sqrt{e}})$.

2. Найти линию, проходящую через точку $M(2;5)$ и обладающую тем свойством, что отрезок любой её касательной, заключенный между координатными осями делится пополам в точке ее касания.
3. Найти линию, проходящую через точку $B(4;3)$ и обладающую тем свойством, что любая её касательная отсекает на оси OY отрезок вдвое меньше расстояния от точки касания до начала координат.
4. Тело, имеющее в начальный момент времени ($t=0$) температуру $T(0) = T_0 = 90^\circ$, охлаждается в воздушной среде до температуры $T_1 = 60^\circ$ в течение $t_1 = 20$ мин. Найти время, за которое тело охладится до температуры 40° , если известно, что температура воздуха 30° , а скорость охлаждения тела пропорциональна разности между температурой тела и температурой воздуха.

Вариант 4

1. Для данного дифференциального уравнения найти кривую, проходящую через точку A .
 - a. $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$, $M(1;1)$.
 - b. $xdy - ydx = ydy$, $M(-1;1)$.
2. Найти линию, проходящую через точку $M(-4;-1)$ и обладающую тем свойством, что отрезок любой её касательной, заключенный между координатными осями делится пополам в точке ее касания.
3. Найти кривую, проходящую через точку $A(1;1)$ и обладающую тем свойством, что произведение углового коэффициента любой её касательной на абсциссу точки касания, сложенное с квадратом ординаты, равно 4.
4. Тело, имеющее в начальный момент времени ($t=0$) температуру $T(0) = T_0 = 100^\circ$, охлаждается в воздушной среде до температуры $T_1 = 65^\circ$ в течение $t_1 = 25$ мин. Найти время, за которое тело охладится до температуры 30° , если известно, что температура воздуха 20° , а скорость охлаждения тела пропорциональна разности между температурой тела и температурой воздуха.

Форма отчета: отчетная работа

Практическое занятие № 23

Тема: действия с комплексными числами

Цель: рассмотреть арифметических операций с комплексными числами, заданных в различных формах.

Оборудование: тетрадь, ручка

Методические указания: ознакомиться с теоретическим материалом, рассмотреть примеры решения задач

Ход выполнения:

Алгебраическая форма комплексного числа

Неразрешимость уравнения $x^2 + 1 = 0$ на множестве действительных чисел привела к введению в математику так называемой **мнимой единицы** i , т.е. мнимого (придуманного) числа, обладающего свойством:

$$i^2 = -1$$

Тогда $x^2 + 1 = 0$ имеет два решения: $x_1 = i$, $x_2 = -i$.

Числа, вида bi , где $b \in R$ называют **мнимыми числами**.

Например, $4i$, $-3i$, $0,45i$, $\sqrt{2}i$, и т.п.

Числа, вида $a + bi$, где $a, b \in R$ называют **комплексными числами**.

Например, $5 + 4i$, $7 - 3i$, $25 + 45i$, $-2 - \sqrt{3}i$, и т.п.

Комплексное число : $z = a + bi$,
где a и b – действительные числа, i – мнимая единица.

Форма записи $z = a + bi$ называется **алгебраической**.

a – действительная часть: $\text{Re}(z)$ bi – мнимая часть: $\text{Im}(z)$

Такая запись позволит записывать не только комплексные числа, но и «чисто мнимые» и «чисто действительные»

например: $5 = 5 + 0i$ или $4i = 0 + 4i$

Во множестве комплексных чисел нет понятий «больше», «меньше», «положительное», «отрицательное».

Числа $z_1 = a_1 + b_1i$ и $z_2 = a_2 + b_2i$ называются **равными**, если $a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$

Числа $z = a + bi$ и $-z = -a - bi$ называются **противоположными**

Числа $z = a + bi$ и $\bar{z} = a - bi$ называются **сопряженными**.

Например

Комплексное число z	Равное z	Противоположное $-z$	Сопряженное $\bar{z}$
$8 + 5i$	$8 + 5i$	$-8 - 5i$	$8 - 5i$
$2 - 4i$	$2 - 4i$	$-2 + 4i$	$2 + 4i$
$-6 + 0,9i$	$-6 + 0,9i$	$6 - 0,9i$	$-6 - 0,9i$

Арифметические операции над комплексными числами в алгебраической форме

Сумма $z_1 + z_2 = (a_1 + b_1i) + (a_2 + b_2i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$

Разность $z_1 - z_2 = (a_1 + b_1i) - (a_2 + b_2i) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$

Произведение $z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1i) \cdot (a_2 + b_2i) = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i$

Деление $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}}$ (числитель и знаменатель умножают на число, сопряженное знаменателю, чтобы избавиться от комплексного числа в знаменателе)

Пример Даны два комплексных числа $z_1 = 4 + 5i$ и $z_2 = 6 - 9i$.

Найти $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 \cdot z_2$, z_1 / z_2

1) $z_1 + z_2 = (4 + 5i) + (6 - 9i) = 4 + 6 + 5i - 9i = 10 - 4i$ (можно просто раскрыть скобки и сложить отдельно действительную и мнимую часть)

2) $z_1 - z_2 = (4 + 5i) - (6 - 9i) = 4 - 6 + 5i + 9i = -2 + 14i$ (можно просто раскрыть скобки и вычесть отдельно действительную и мнимую часть)

3) $z_1 \cdot z_2 = (4 + 5i) \cdot (6 - 9i) = 24 - 36i + 30i - 45i^2 =$
 $= 24 - 6i - 45 \cdot (-1) = 24 - 6i + 45 = 69 - 6i$

(можно просто раскрыть скобки и сложить отдельно действительную и мнимую часть, но учитывая, что $i^2 = -1$)

4)

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} = \frac{(4 + 5i) \cdot (6 + 9i)}{(6 - 9i) \cdot (6 + 9i)} = \frac{24 + 36i + 30i + 45i^2}{36 - 81i^2} = \frac{24 + 66i + 45 \cdot (-1)}{36 - 81 \cdot (-1)} =$$

$$\frac{24 + 66i - 45}{36 + 81} = \frac{-21 + 66i}{117} = -\frac{21}{117} + \frac{66}{117}i$$

(числитель и знаменатель умножаем на число, сопряженное знаменателю, т.е. на $\overline{z} = 6 + 9i$ чтобы избавиться от комплексного числа в знаменателе)

Комплексная плоскость. Геометрическая интерпретация комплексных чисел

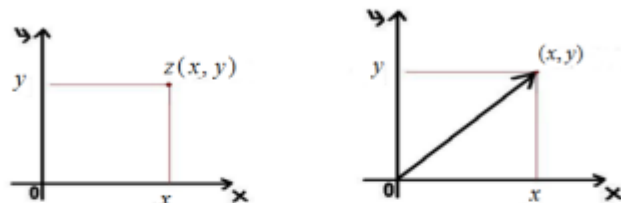
Плоскость называется **комплексной**, если каждому комплексному числу $z = x + iy$ ставится в соответствие точки плоскости с координатами $z(x, y)$, причем, это соответствие взаимно-однозначное.

Ось OX называется **действительной** осью, т. к. на ней расположены точки, соответствующие числам, у которых $y = 0$.

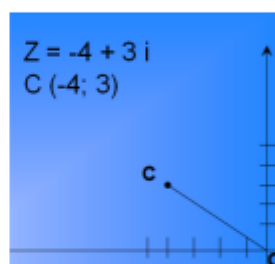
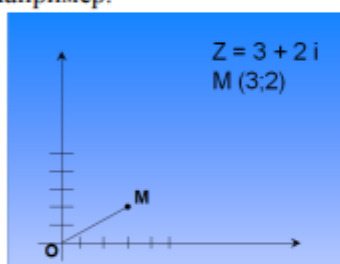
Ось OY называется **мнимой** осью, т. к. на ней расположены точки, соответствующие числам, у которых $x = 0$.

Таким образом, любое комплексное число $z = a + bi$ можно изобразить на плоскости точкой с координатами (a, b) , причем взаимно однозначно.

С каждой точкой $z(x, y)$ комплексной плоскости связан *радиус-вектор* этой точки.



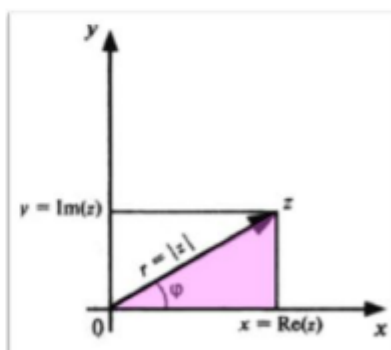
Например.



Длина r вектора, соответствующего комплексному числу Z называется **модулем** комплексного числа Z и обозначается $|z|$.

Угол φ , образованный радиус-вектором с положительным направлением оси OX , называется **аргументом** комплексного числа Z и обозначается $\arg z$.

$$\varphi = \arg z \in [-\pi; \pi] \text{ или } \varphi = \arg z \in [-180^\circ; 180^\circ]$$



Рассматривая на чертеже выделенный треугольник, получаем соотношения:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (\text{из т. Пифагора})$$

$$\cos \varphi = \frac{x}{r} \quad \sin \varphi = \frac{y}{r} \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}$$

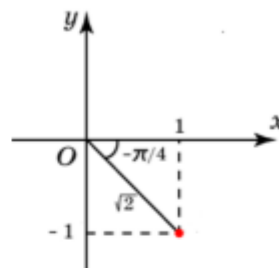
Пример: Задано комплексное число $z = 1 - i$. Найти $|z|$ и $\arg z$.

Решение.

$$z = 1 - i, \text{ значит, } x = 1, \quad y = -1;$$

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2};$$

$$\left. \begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin \varphi &= \frac{y}{r} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{4} = -45^\circ$$



Значение аргумента находим из таблицы тригонометрических функций, находя соответствующее значение косинуса и синуса, т.е. по таблице смотрим,

при каком угле (аргументе) $\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$, а $\sin \varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Ответ: $r = \sqrt{2}$; $\varphi = -\frac{\pi}{4}$.

Тригонометрическая форма комплексного числа

Заменив в алгебраической форме записи комплексного числа $z = x + yi$ x и y соотношениями $x = r \cdot \cos \varphi$ $y = r \cdot \sin \varphi$, получим:
 $z = x + yi = r \cdot \cos \varphi + r \cdot \sin \varphi \cdot i = r(\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$, т.е.
 тригонометрическую форму записи комплексного числа.

Тригонометрическая форма: $z = r(\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$

Действия над комплексными числами, заданными в тригонометрической форме.

Умножение $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1(\cos \varphi_1 + i \cdot \sin \varphi_1) \cdot r_2(\cos \varphi_2 + i \cdot \sin \varphi_2) = \\ &= r_1 \cdot r_2 (\cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cdot i \cdot \sin \varphi_2 + i \cdot \sin \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 + i^2 \cdot \sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2) = \\ &= r_1 \cdot r_2 (\cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2 + i(\cos \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2)) = \\ &= r_1 \cdot r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) \end{aligned}$$

Деление $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$

Возведение в степень $z^n = r^n (\cos n\varphi + i \cdot \sin n\varphi)$ (формула Муавра)

Показательная форма комплексного числа

В 1740 году Леонард Эйлер опубликовал формулу, связывающую комплексную экспоненту с тригонометрическими функциями:

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi \quad - \text{формула Эйлера.}$$

Таким образом, если комплексное число задано в тригонометрической форме $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, то на основании формулы Эйлера, выражение в скобках можно заменить на показательное выражение. В результате получим показательную форму комплексного числа:

$$\text{Показательная форма: } z = r \cdot e^{i\varphi}$$

Действия над комплексными числами, заданными в показательной форме

$$z_1 = r_1 \cdot e^{i\varphi_1} \quad \text{и} \quad z_2 = r_2 \cdot e^{i\varphi_2}$$

$$\text{Умножение} \quad z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

$$\text{Деление} \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

$$\text{Возведение в степень} \quad (z)^n = r^n \cdot e^{in\varphi}$$

Алгебраическая форма удобна при сложении и вычитании.

Показательная и тригонометрическая форма удобна при умножении, делении, возведении в степень;

Пример. Перевести в тригонометрическую и показательную форму компл. число $z = \sqrt{3} + i$.

Решение. У нас число задано в алгебраической форме, значит, чтобы перевести его в тригонометрическую или показательную, нужно найти r и φ

$$z = \sqrt{3} + i, \text{ значит, } x = \sqrt{3}, \quad y = 1;$$

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2;$$

$$\left. \begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \varphi &= \frac{y}{r} = \frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{6} = 30^\circ$$

Таким образом, тригонометрическая форма данного комплексного числа

имеет вид: $z = r(\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi) = 2\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \cdot \sin \frac{\pi}{6}\right).$

Показательная форма имеет вид: $z = r \cdot e^{i\varphi} = 2 \cdot e^{\frac{\pi}{6}i}$

Ответ. $z = 2\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \cdot \sin \frac{\pi}{6}\right), \quad z = 2 \cdot e^{\frac{\pi}{6}i}$

Пример. Даны два комплексных числа z_1 и z_2 .

Найти $z_1 \cdot z_2$, z_1 / z_2 в тригонометрической и показательной форме

$$z_1 = 4(\cos 150^\circ + i \cdot \sin 150^\circ) \quad z_2 = \frac{1}{2}(\cos 90^\circ + i \cdot \sin 90^\circ)$$

Решение.

Из записи чисел имеем: $r_1 = 4$, $r_2 = \frac{1}{2}$, $\varphi_1 = 150^\circ$, $\varphi_2 = 90^\circ$.

Действия в тригонометрической форме:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1 \cdot r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) = \\ &= 4 \cdot \frac{1}{2} (\cos(150^\circ + 90^\circ) + i \cdot \sin(150^\circ + 90^\circ)) = 2(\cos 240^\circ + i \cdot \sin 240^\circ) \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 - \varphi_2)) = \\ &= 4 : \frac{1}{2} (\cos(150^\circ - 90^\circ) + i \cdot \sin(150^\circ - 90^\circ)) = 8(\cos 60^\circ + i \cdot \sin 60^\circ) \end{aligned}$$

Действия в показательной форме:

Запишем числа z_1 и z_2 в показательной форме:

$$\begin{aligned} z_1 &= 4e^{i \cdot 150^\circ} \quad z_2 = \frac{1}{2}e^{i \cdot 90^\circ} \\ z_1 \cdot z_2 &= r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{i(150^\circ + 90^\circ)} = 2e^{i 240^\circ} \end{aligned}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} = 4 : \frac{1}{2} e^{i(150^\circ - 90^\circ)} = 8e^{i60^\circ}$$

Как видно из примеров, показательная форма упрощает запись вычислений и оформление решения делает более компактным.

Пример. Вычислить $(\sqrt{2} - \sqrt{2}i)^{10}$.

Решение. Запишем данное комплексное число в показательной форме.

$$z = \sqrt{2} - \sqrt{2}i, \text{ значит, } x = \sqrt{2}, \quad y = -\sqrt{2};$$

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{2})^2} = \sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2;$$

$$\left. \begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \varphi &= \frac{y}{r} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{4} = -45^\circ$$

Таким образом, показательная форма данного комплексного числа имеет вид:

$$z = re^{i\varphi} = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}.$$

$$\text{Вычислим } z^{10} = r^{10} e^{i \cdot 10\varphi} = 2^{10} e^{i\left(-\frac{\pi}{4} \cdot 10\right)}$$

Переведем полученный результат в алгебраическую форму $x + iy$. Для этого запишем число в тригонометрической форме и подставим значения синуса и косинуса.

$$1024e^{i\left(-\frac{5\pi}{2}\right)} = 1024 \left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right) = 1024(0 + i \cdot (-1)) = -1024i.$$

$$\text{Ответ: } (\sqrt{2} - \sqrt{2}i)^{10} = -1024i$$

Форма отчета: отчетная работа

Практическое занятие № 24

Тема: Элементы аналитической геометрии

Цель: ввести в рассмотрение элементы аналитической геометрии в пространстве

Оборудование: тетрадь, ручка

Методические указания: ознакомиться с теоретическим материалом, рассмотреть примеры решения задач

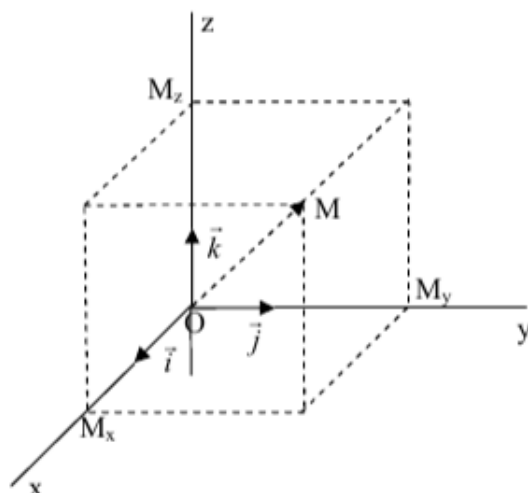
Ход выполнения:

Теоретическая часть

Аффинная система координат $\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ называется *прямоугольной декартовой системой координат*, если ее базисные векторы единичны и попарно ортогональны:

$$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1, \vec{i} \perp \vec{j}, \vec{i} \perp \vec{k}, \vec{j} \perp \vec{k}.$$

$$M(x, y, z) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$



Пусть M – произвольная точка пространства, M_x, M_y, M_z – ее проекции на координатные оси, тогда

$$x = \pm OM_x, y = \pm OM_y, z = \pm OM_z$$

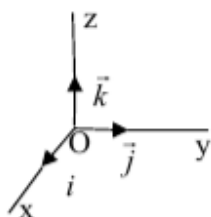
(«+» – берется в том случае, если проекция точки M на соответствующую ось принадлежит положительной полуоси; «-» – отрицательной полуоси).

Расстояние между двумя точками в пространстве $A(x_1; y_1; z_1), B(x_2; y_2; z_2)$, заданными своими координатами в прямоугольной декартовой системе координат вычисляется по формуле:

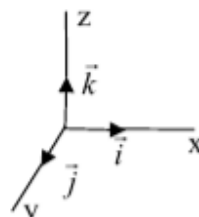
$$\rho(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Репер $R = \{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ называется *правым*, если поворот от первого базисного вектора ко второму происходит против часовой стрелки, если смотреть из конца третьего вектора. Если поворот происходит по часовой стрелке, то репер называется левым.

В дальнейшем мы будем использовать в основном правую систему координат.



Прямоугольная декартова система координат (правая)



Прямоугольная декартова система координат (левая)

Две правых (или две левых) системы координат называются одинаково ориентированными.

Формулы преобразования координат при переходе от новой прямоугольной декартовой системы координат $R' = \{O, \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'\}$ к старой прямоугольной декартовой системе координат $R = \{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ имеют вид:

$$\begin{cases} x = c_{11}x' + c_{12}y' + c_{13}z' + x_0 \\ y = c_{21}x' + c_{22}y' + c_{23}z' + y_0 \\ z = c_{31}x' + c_{32}y' + c_{33}z' + z_0, \end{cases}$$

где $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{pmatrix}$ – матрица перехода от старого базиса к новому

является ортогональной. В этом случае $\det C = \pm 1$.

Если реперы R и R' одинаково ориентированы, то $\det C = 1$, если противоположно ориентированы, то $\det C = -1$.

Задачи:

- а) Найти расстояние точки $M(x, y, z)$ до начала системы координат.
б) Найти расстояние точки $M(x, y, z)$ до координатных плоскостей.
- Вывести формулы для нахождения расстояний от точки $M(x, y, z)$ до координатных осей.
- Чему равно расстояние между точками $M(1, 2, 3)$ и $N(1, -2, 0)$?

Форма отчета: отчетная работа

Практическое занятие № 25

Тема: Поверхности второго порядка

Цель: рассмотреть поверхности второго порядка

Оборудование: тетрадь, ручка

Методические указания: ознакомиться с теоретическим материалом, рассмотреть примеры решения задач

Ход выполнения:

1. Составить уравнение поверхности, образованной вращением параболы $z^2 = 10y, x=0$ вокруг оси Oz .
2. Составить уравнение поверхности, образованной вращением вокруг оси Oy каждой из следующих кривых, расположенной в плоскости xOy :
а) эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; б) гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$;
в) параболы $x^2 = 2py$.
3. Написать уравнение поверхности, образованной вращением синусоиды $z = \sin x$ вокруг оси Oz .
4. Напишите уравнение поверхности, образованной вращением прямой $x + 2y - 4z = 0, z = 0$ вокруг оси Ox .
5. Докажите, что поверхность, образованная вращением вокруг оси Oz линии l , заданной уравнениями $x = f_1(z), y = f_2(z)$, имеет уравнение $x^2 + y^2 = f_1^2(z) + f_2^2(z)$.
6. Составить уравнение цилиндрической поверхности в каждом из следующих случаев:

Форма отчета: отчетная работа

4. ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ

4.1 Основные печатные и (или) электронные издания:

О-1. Шевелев, Ю. П. Дискретная математика: учебное пособие для спо / Ю. П. Шевелев. — Санкт-Петербург: Лань, 2021. — 592 с. — ISBN 978-5-8114-7504-9. — Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/161638> (дата обращения: 02.05.2025). — Режим доступа: для авториз. пользователей.

О-2. Григорьев, В.П. Элементы высшей математики: учеб. для студ. учреждений сред. проф. образования / В.П. Григорьев, Ю.А. Дубинский, Т.Н. Сабурова. — 4-е изд., стер. — М.: Образовательно-издательский центр «Академия», 2023. — 400 с. — URL: <https://academia-moscow.ru/catalogue/4890/689157/>. — Режим доступа: Электронная библиотека «Academia-moscow». - Текст: электронный.

4.2 Дополнительные печатные и (или) электронные издания (электронные ресурсы):

Д-1. Григорьев, В.П. Элементы высшей математики: учебник для студ. учреждений сред. проф. образования / В.П. Григорьев, Ю.А. Дубинский. – 4-е изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия», 2008. – 320 с.

Д-2. Богомолов, Н.В. Практические занятия по математике: Учебное пособие для средних проф. учеб. заведений. – 5-е изд., стер. – М.: Высш. шк., 2000. – 495 с.

**ЛИСТ ИЗМЕНЕНИЙ И ДОПОЛНЕНИЙ, ВНЕСЕННЫХ В
МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ**

№ изменения, дата внесения, № страницы с изменением	
Было	Стало
Основание:	
Подпись лица, внесшего изменения	