ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ИРКУТСКОЙ ОБЛАСТИ «ЧЕРЕМХОВСКИЙ ГОРНОТЕХНИЧЕСКИЙ КОЛЛЕДЖ ИМ. М.И. ЩАДОВА»

РАССМОТРЕНО
на заседании ЦК
«Информатики и ВТ»
Протокол №5
«09» января 2024 г.
Председатель: Чипиштанова Д.В.

УТВЕРЖДАЮ
Зам. директора по УР
О.В. Папанова
«22» февраля 2024 г.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

по практическим занятиям студентов

учебной дисциплины

ОП.10 Численные методы

09.02.07 Информационные системы и программирование

Разработал:
Окладникова Т.В.

2024г.

СОДЕРЖАНИЕ

1.ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Методические указания по практическим занятиям учебной дисциплины **«Численные методы»** составлены в соответствии с учебным планом и рабочей программы дисциплины по специальности ***09.02.07 Информационные системы и программирование***

Цель проведения практических занятий: формирование практических умений, необходимых в последующей профессиональной и учебной деятельности.

Методические указания практических занятий являются частью учебно-методического комплекса по учебной дисциплине и содержат:

- тему занятия (согласно тематическому плану учебной дисциплины);
- цель;
- оборудование (материалы, программное обеспечение, оснащение, раздаточный материал и др.);
- методические указания (изучить краткий теоретический материал по теме практического занятия);
- ход выполнения;
- форму отчета.

В результате выполнения полного объема заданий практических занятий студент должен **уметь:**

использовать основные численные методы решения математических задач;

- выбирать оптимальный численный метод для решения поставленной задачи;
- давать математические характеристики точности исходной информации и оценивать точность полученного численного решения;
- разрабатывать алгоритмы и программы для решения вычислительных задач, учитывая необходимую точность получаемого результата.

При проведении практических работ применяются следующие технологии и методы обучения: чтение с маркировкой, «фишбон», информационные технологии, ментальные карты и т.д.

Оценка выполнения практических занятий

«Отлично» - теоретическое содержание курса освоено полностью, без пробелов, умения сформированы, все предусмотренные программой учебные задания выполнены, качество их выполнения оценено высоко.

«Хорошо» - теоретическое содержание курса освоено полностью, без пробелов, некоторые умения сформированы недостаточно, все предусмотренные программой учебные задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками.

«Удовлетворительно» - теоретическое содержание курса освоено частично, но пробелы не носят существенного характера, необходимые умения работы с освоенным материалом в основном сформированы, большинство предусмотренных программой обучения учебных заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки.

«Неудовлетворительно» - теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки.

В соответствии с учебным планом и рабочей программы дисциплины **«Численные методы»** на практические (лабораторные) занятия отводится **18 часов.**

2. ПЕРЕЧЕНЬ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

№ п/п	Тема практических занятий	Количество часов
1	**Практическое занятие № 1** Вычисление погрешностей результатов арифметических действий над приближёнными числами.	4
2	**Практическое занятие № 2** Решение алгебраических и трансцендентных уравнений методом половинного деления и методом итераций.	2
3	**Практическое занятие № 3** Решение алгебраических и трансцендентных уравнений методами хорд и касательных.	2
4	**Практическое занятие № 4** Решение систем линейных уравнений приближёнными методами.	4
5	**Практическое занятие № 5** Составление интерполяционных формул Лагранжа, Ньютона, нахождение интерполяционных многочленов сплайнами.	2
6	**Практическое занятие № 6** Вычисление интегралов методами численного интегрирования.	2
7	**Практическое занятие № 7** Применение численных методов для решения дифференциальных уравнений.	2

3. СОДЕРЖАНИЕ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

Практическое занятие № 1

Тема: Вычисление погрешностей результатов арифметических действий над приближёнными числами.

Цель: научиться выполнять арифметические действия с приближенными числами; вычислять погрешности полученных результатов.

Оборудование: тетрадь, ручка, ПК

Методические указания: ознакомьтесь с теоретическими сведениями, выполните задания, ответить на контрольные вопросы

Ход выполнения:

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ:

Приближенное число заменяет собой число точное, которое чаще всего остается неизвестным.

Верной цифрой называют такую, погрешность которой не превышает половины единицы следующего разряда.

Сомнительная цифра – это цифра, следующая за верной.

Значащими цифрами данного числа называют цифры, начиная с первой слева, отличной от нуля, и кончая последней, за точность которой еще можно поручиться.

Погрешностью Δ_a *приближенного значения а числа х* называется разность $\Delta_a = x - a$, а модуль этой погрешностью называется *абсолютной погрешностью*.

Если $\Delta_a > 0$, то а взято с недостатком. Если $\Delta_a < 0$, то а взято с избытком.

Границей погрешности приближенного значения а числа х называется всякое неотрицательное число h_a, которое не меньше модуля погрешности: $|\Delta_a| \le h_a$.

Говорят, что приближение а приближает число х с точностью до h_a, если $|x-a| \le h_a$, $a - h_a \le x \le a + h_a$, $x = a \pm h_a$.

Относительной погрешностью приближенного значения а числа х называется отношение

$$\omega_\delta = \frac{\Delta_a}{a}, a \ne 0.$$

Квадратный корень из приближенного числа вычисляется по формуле: $\sqrt{x} = \frac{1}{2}\left(a + \frac{x}{a}\right)$, где $a \approx \sqrt{x}$.

Общая формула для вычисления корня n-ой степени: $\sqrt[n]{x} = \frac{1}{n}\left[(n-1)a + \frac{x}{a^{n-1}}\right]$, где $a \approx \sqrt[n]{x}$.

Примечание: выполнить задания согласно своему варианту

ЗАДАНИЕ 1 Вычислить сумму с указанным числом верных десятичных и запасных знаков.

Вар.	Сумма	Верн. дес. зн.	Зап. зн.	Вар.	Сумма	Верн. десят. знаков	Зап. знаков
I	$x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} + \sqrt{29} + \sqrt{43}$	**2**	**1, 2**	**VI**	$x = \frac{4\pi}{3} + e^{-1} + \sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{11}$	**2**	**1, 2**
II	$x = \frac{\pi}{5} + \frac{e}{2} + \sqrt{55} + \sqrt{49}$	**2**	**2, 3**	**VII**	$x = \sqrt{2\pi} + tg1 + \lg e$	**2**	**1, 2**
III	$x = \pi + e^2 + \sqrt{53} + \sqrt{10}$	**4**	**1, 2**	**VIII**	$x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} + \frac{2}{\pi} + \sqrt{\frac{1}{3}}$	**3**	**1, 2**
IV	$x = \frac{\pi}{2} + \sqrt{e} + \lg e + \sqrt{67}$	**4**	**1, 2**	**IX**	$x = e^{-2} + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2\pi} + \sqrt{\frac{1}{5}}$	**3**	**2, 3**
V	$x = \frac{\pi}{3} + \sin 1 + e^{-1}$	**2**	**3, 4**	**X**	$x = \frac{1}{2\pi} + \frac{e}{\pi} + \sqrt{\frac{3}{7}}$	**4**	**2, 3**

ЗАДАНИЕ 2 Вычислить разность с указанным числом значащих цифр.

Вариант	Разность	Значащих цифр	Вариант	Разность	Значащих цифр
I	$x = \frac{22}{7} - \pi$	**3**	**VI**	$x = \sqrt{\frac{2}{\pi}} - \frac{\pi}{4}$	**3**
II	$x = \pi^2 - e$	**4**	**VII**	$x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} - \frac{1}{\sqrt{\pi}}$	**3**
III	$x = \pi - e^2$	**2**	**VIII**	$x = \sqrt{10} - \sqrt{\pi}$	**4**
IV	$x = 2\pi - 6tg1$	**3**	**IX**	$x = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} - \sin 1$	**4**
V	$x = \sqrt{\pi} - \sqrt{3}$	**2**	**X**	$x = \frac{15}{19} - \frac{\pi}{4}$	**5**

ЗАДАНИЕ 3 Найти произведение приближенных чисел (2 способами). Определить, сколько значащих цифр имеет произведение, указать верные и сомнительные цифры.

Вариант	a	b	Вариант	a	b
I	**$1{,}58 \pm 0{,}005$**	**$0{,}973 \pm 0{,}0005$**	**VI**	**$1{,}109 \pm 0{,}0005$**	**$78{,}5184 \pm 0{,}00005$**
II	**$3{,}77 \pm 0{,}005$**	**$1{,}107 \pm 0{,}005$**	**VII**	**$4{,}371 \pm 0{,}0005$**	**$97{,}106 \pm 0{,}0005$**
III	**$0{,}108 \pm 0{,}0005$**	**$90{,}7 \pm 0{,}05$**	**VIII**	**$5{,}804 \pm 0{,}0005$**	**$105{,}84 \pm 0{,}005$**
IV	**$10{,}1071 \pm 0{,}00005$**	**$0{,}13 \pm 0{,}005$**	**IX**	**$10{,}382 \pm 0{,}0005$**	**$64{,}42 \pm 0{,}005$**
V	**$0{,}015 \pm 0{,}0005$**	**$11{,}1073 \pm 0{,}00005$**	**X**	**$0{,}15 \pm 0{,}005$**	**$99{,}908 \pm 0{,}0005$**

ЗАДАНИЕ 4 Вычислить и указать количество значащих цифр в результате, если исходные данные – приближенные числа, определенные с точностью до половины единицы последнего разряда.

Вариант	Задания			Вариант	Задания		
I	**$(0{,}378)^3$**	$\sqrt{0{,}0428}$	**0,7342 : 0,3271**	**VI**	**$(2{,}6019)^4$**	$\sqrt{10{,}586}$	**6,78542 : 3,015**
II	**$(7{,}542)^2$**	$\sqrt{17{,}5324}$	**6,7 : 2,3784**	**VII**	**$(10{,}1013)^2$**	$\sqrt{25{,}607}$	**4,50189 : 2,78**
III	**$(5{,}689)^4$**	$\sqrt{19{,}1805}$	**27,61843 : 8,3**	**VIII**	**$(0{,}419)^3$**	$\sqrt{28{,}1198}$	**12,01809 : 6,001**
IV	**$(0{,}129)^2$**	$\sqrt{21{,}594}$	**25,98595 : 10,57**	**IX**	**$(0{,}5601)^2$**	$\sqrt{15{,}0509}$	**25,4207 : 8,704**
V	**$(3{,}586)^3$**	$\sqrt{16{,}1018}$	**8,92 : 4,5401**	**X**	**$(1{,}1809)^2$**	$\sqrt{18{,}0011}$	**31,560185 : 5,7894**

ЗАДАНИЕ 5 Вычислить с указанным числом значащих цифр.

Вар.	Пример	Зн. ц.	Пример	Зн. ц.	Вар.	Пример	Зн. ц.	Пример	Зн. ц.
I	$\sqrt{3{,}78}$	**6**	$\sqrt[10]{10}$	**5**	**VI**	$\sqrt{19{,}807}$	**8**	$\sqrt[5]{15}$	**8**
II	$\sqrt{5{,}906}$	**5**	$\sqrt[6]{10}$	**8**	**VII**	$\sqrt{28{,}908}$	**9**	$\sqrt[6]{31}$	**9**
III	$\sqrt{11{,}685}$	**4**	$\sqrt[8]{15}$	**7**	**VIII**	$\sqrt{27{,}591}$	**7**	$\sqrt[10]{53}$	**7**
IV	$\sqrt{39{,}349}$	**5**	$\sqrt[10]{10}$	**6**	**IX**	$\sqrt{37{,}708}$	**8**	$\sqrt[8]{48}$	**8**
V	$\sqrt{25{,}694}$	**6**	$\sqrt[7]{14}$	**8**	**X**	$\sqrt{48{,}8193}$	**7**	$\sqrt[9]{91}$	**5**

ЗАДАНИЕ 6 Решить задачу на определение абсолютной (относительной) погрешности.

I в. Укажите относительную погрешность, которая получится, если число 6,572 заменить числом 6,57.

II в. Стороны параллелограмма равны 11 и 12 см, меньшая диагональ – 13 см. В результате измерения линейкой большей диагонали получили 18,9 см. Какова относительная погрешность этого приближения?

III в. В равнобедренном треугольнике длина основания равна 24 см, а боковой стороны – 15 см. В результате измерения линейкой радиусов, вписанной и описанной окружностей, получили соответственно 4,1 и 12,3 см. Найдите относительные погрешности этих приближений.

IV в. Скорость света в вакууме (299792,5 ± 0,4) км/с, а скорость звука в воздухе (331,63 ± 0,004) м/с. Что измерено с большей точностью?

V в. Какая из характеристик самолета «АН-24» дана точнее: размах крыла 29,2 м; взлетная масса 21 т; собственная масса 13,9 т; практический потолок высоты 8,9 км?

VI в. Округлите число 6,87 до десятых и найдите абсолютную и относительную погрешность.

VII в. Найдите относительную погрешность приближенного значения а = 0,143 величины х = 1/7.

VIII в. Докажите, что относительная погрешность приближенного числа не превосходит 10%, если в его записи две значащие цифры.

IX в. Докажите, что относительная погрешность приближенного числа не превосходит 1%, если в его записи три значащие цифры.

X в. Найдите границы значений грузоподъемности автомобиля ГАЗ-51А, если она равна 2,5 (±15%) т.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что такое погрешность?
2. В чем разница между абсолютной погрешностью и относительной?
3. Каким числом является результат действий с приближенными числами?
4. Почему при приближенных вычислениях погрешность может накапливаться?

СОСТАВЛЕНИЕ ОТЧЕТА

- Номер и наименование практической работы

- Цель работы

- Номер выполняемого задания и подробное оформление

Форма отчета: отчет с решением, ответы на контрольные вопросы, защита

Практическое занятие № 2

Тема: Решение алгебраических и трансцендентных уравнений методом половинного деления и методом итераций.

Цель: закрепить навыки решения уравнений приближенными методами.

Оборудование: тетрадь, ручка, ПК

Методические указания: ознакомьтесь с теоретическими сведениями, выполните задания, ответить на контрольные вопросы

Ход выполнения:

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ:

Число $x = x^*$ называется корнем уравнения $f(x) = 0$*, если* $f(x^*) = 0$.

Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на $[a, b]$ и на концах отрезка принимает значения разных знаков, то на $[a, b]$ существует хотя бы один корень.

При определении приближенных значений корней уравнения необходимо решить две задачи:

1. Отделить корень уравнения — значит найти такой интервал, внутри которого находится один и только один корень данного уравнения.

2. Уточнить корень с наперед заданным числом верных знаков.

Методы уточнения корней

Метод половинного деления

В основе метода лежит деление отрезка пополам, на котором определен корень уравнения. Итерационная формула имеет вид: $x^{(k)} = \dfrac{a+b}{2}$

Где

x – искомый корень уравнения

k – индекс приближенного значения корня

a и b – отрезок [a ; b] на котором определен корень уравнения.

Отрезок [a ; b] делится затем на два отрезка: [a ; $x^{(k)}$] и [$x^{(k)}$; b], из которых выбирается тот, на концах которого функция принимает значения разных знаков.

Процесс деления продолжается до тех пор, пока длина последнего отрезка не станет $|a–b| \le 2\varepsilon$, где ε – точность приближений.

Метод простой итерации.

Исходное уравнение f(x)=0 должно быть преобразовано к виду: x=φ(x)

Итерационная формула имеет вид: $x^{(k)} = \phi(x^{(k-1)})$

Выполнение итераций повторяют пока не будет выполнено |x(k) – x(k-1)| ≤ ε

Задание 1. Отделить корни алгебраического уравнения графическим или аналитическим способом и уточнить корни методом половинного деления до 0,01.

Вар.	Задание	Вар.	Задание
I	$x^3 + 3x + 1 = 0$	**VI**	$x^4 + x - 1 = 0$
II	$x^3 - 3x^2 + 2,5 = 0$	**VII**	$4x^3 - 3x^2 + 1 = 0$
III	$x^4 - x^3 - 2x^2 + 3x = 0$	**VIII**	$x^3 + 3x^2 + 1 = 0$
IV	$x^3 + 1,7x^2 + 1,7 = 0$	**IX**	$x^3 + 3x^2 + 4x + 1 = 0$
V	$x^3 - 2x^2 + 7 = 0$	**X**	$2x^3 + 2x^2 - x - 3 = 0$

Задание 2. Отделить корни трансцендентного уравнения графическим способом и уточнить минимальный корень уравнения методом касательных до 0,001.

Вариант	Задание	Вариант	Задание
I	$x - \sin x - 1 = 0$	**VI**	$tg\, x = -x$
II	$5^x - 6x - 3 = 0$	**VII**	$x\, tgx = 1$
III	$2x^2 - 0,5^x - 3 = 0$	**VIII**	$2\sqrt{x} + x^2 = 3$
IV	$\sqrt{x} = 1,5x - 3$	**IX**	$e^x = (1+x)^2$
V	$x^2 - \sin x = 0$	**X**	$tg\, x = -x^3$

Задание 3. Отделить корни трансцендентного уравнения графическим способом и уточнить максимальный корень уравнения методом хорд до 0,001.

Вариант	Задание	Вариант	Задание
I	$5\sqrt{x} = x^2$	**VI**	$x^3 + 0,1x^2 + 0,4x - 1,2 = 0$
II	$x \lg (x+1) - 1 = 0$	**VII**	$\sin(x + \pi) = x^2$
III	$x - 2 \sin x = 0$	**VIII**	$\sin 3x = x$
IV	$x^2 - \cos x = 0$	**IX**	$\sqrt{x} + \sin x = 0$
V	$2^x = \sqrt{x+1}$	**X**	$(x-1)^2 = \sin x$

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что такое интервал изоляции корней?
2. Для какого типа уравнений применим метод половинного деления?
3. Какому условию должна удовлетворять функция на интервале, если нам известно, что корень уравнения находится на этом интервале?
4. В чем схожесть методов хорд и касательных?

Форма отчета: отчет с решением, ответы на контрольные вопросы, защита

Практическое занятие№ 3

Тема: Решение алгебраических и трансцендентных уравнений методами хорд и касательных.

Цель: закрепить навыки решения уравнений приближенными методами.

Оборудование: тетрадь, ручка, ПК

Методические указания: ознакомьтесь с теоретическими сведениями, выполните задания, ответить на контрольные вопросы

Ход выполнения:

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ:

Метод касательных (метод Ньютона)

Итерационная формула метода Ньютона имеет вид: $x^{(k+1)} = x^{(k)} - \dfrac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}$

В качестве начального приближения выбирается та из границ отрезка [a ; b] на которой выполняется условие: $f(x) * f''(x) > 0$

Выполнение итераций повторяют пока не будет выполнено $|x^{(k)} - x^{(k-1)}| \leq \varepsilon$

Метод хорд

Итерационная формула имеет вид: $x^{(k)} = \dfrac{a * f(b) - b * f(a)}{f(b) - f(a)}$

Отрезок [a ; b] делится затем на два отрезка: [a ; $x^{(k)}$] и [$x^{(k)}$; b]. Выбирается новый отрезок, в зависимости от условия:

- если f(a)>0 и f($x^{(k)}$)>0 или f(a)<0 и f($x^{(k)}$)<0 то отрезок [$x^{(k)}$; b]
- если f(b)>0 и f($x^{(k)}$)>0 или f(b)<0 и f($x^{(k)}$)<0 то отрезок [a ; $x^{(k)}$]

Выполнение итераций повторяют, пока не будет выполнено $|x^{(k)} - x^{(k-1)}| \leq \varepsilon$

Комбинированный метод хорд и касательных

Метод основан на построении схематического графика функции, определении интервалов его пересечения с осью абсцисс и последующим «сжатием» этого интервала при помощи строимых хорд и касательных к графику этой функции.

Задание 1. Отделить корни алгебраического уравнения $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ графическим или аналитическим способом и уточнить корни комбинированным методом хорд и касательных до 0,001.

Вар.	**Коэффициенты**			
	a	**b**	**c**	**d**
I	**1**	**-0,2**	**0,4**	**-1,6**
II	**2**	**-0,1**	**0,3**	**-1,4**
III	**1**	**-0,3**	**0,1**	**-1,3**
IV	**2**	**-0,4**	**0,2**	**-1,1**
V	**1**	**-0,5**	**0,4**	**-1,2**
VI	**2**	**-0,1**	**0,2**	**-1,7**
VII	**2**	**-0,2**	**0,5**	**-1,9**
VIII	**1**	**-0,4**	**0,2**	**-1,5**
IX	**2**	**-0,5**	**0,3**	**-1,8**
X	**1**	**-0,1**	**0,4**	**-1,1**

Задание 2. Отделить корни трансцендентного уравнения графическим способом и уточнить их методом итераций до 0,001.

Вариант	**Задание**	**Вариант**	**Задание**
I	***-0,5x = cos2x***	**VI**	***x = 2sin 2x***
II	***–x/3 = sin 3x***	**VII**	***-x = 5sin3x***
III	***-0,3x = cos x***	**VIII**	***cos 3x = 2x***
IV	***0,4x = cos(0,5x)***	**IX**	***4sin(1,5x)-2,8x=0***
V	***-x = 4cos x***	**X**	***cos(2,5x)-4x=0***

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Если итерационный процесс сходится, то какую точку можно брать в качестве нулевого приближения?
2. Можно ли графическим методом найти точку нулевого приближения?
3. В чем преимущество использования комбинированного метода хорд и касательных перед отдельным использованием этих методов?

Форма отчета: отчет с решением, ответы на контрольные вопросы, защита

Практическое занятие № 4

Тема: Решение систем линейных уравнений приближёнными методами

Цель: закрепить навыки решения систем алгебраических уравнений приближёнными методом.

Оборудование: тетрадь, ручка, ПК

Методические указания: ознакомьтесь с теоретическими сведениями, выполните задания, ответить на контрольные вопросы

Ход выполнения:

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ:

1. Метод Гаусса

Линейное уравнение называется *однородным,* если его свободный член равен нулю. Система линейных уравнений называется *однородной,* если все входящие в нее уравнения являются линейными однородными уравнениями.

Однородная система n линейных уравнений с n неизвестными имеет вид:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = 0. \end{array}\right\}$$

Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что однородная система линейных уравнений имеет нулевое решение: $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$. *Таким образом, однородная система линейных уравнений всегда совместна. Поэтому важно выяснить, при каких условиях она является определенной. Однородная система n линейных уравнений с n неизвестными имеет ненулевые решения тогда и только тогда, когда определитель ее равен нулю.*

2. Метод итераций

При большом числе уравнений (~ 100 и более) прямые методы решения СЛАУ становятся труднореализуемыми на ЭВМ, прежде всего из-за сложности хранения и обработки матриц большой размерности.

Методы последовательных приближений, в которых при вычислении последующего приближения решения используются предыдущие, уже известные приближенные решения, называются итерационными.

В итерационных методах решение может быть вычислено за бесконечное число итераций (приближений), а поскольку это невозможно, то, останавливая процесс вычислений на какой-либо итерации, необходимо уметь оценивать погрешность метода итераций.

Приближенные методы решения систем линейных уравнений позволяют получать значения корней системы с заданной точностью в виде предела последовательности некоторых векторов. Процесс построения такой последовательности называется итерационным (повторяющимся).

Эффективность применения приближенных методов зависят от выбора начального вектора и быстроты сходимости процесса.

Пусть дана линейная система

3. Сравнение прямых и итерационных методов

Системы линейных алгебраических уравнений можно решать как с помощью прямых, так и итерационных методов. Для систем уравнений средней размерности чаще используют прямые методы.

Итерационные методы применяют главным образом для решения задач большой размерности, когда использование прямых методов невозможно из-за ограничений в доступной оперативной памяти ЭВМ или из-за необходимости выполнения чрезмерно большого числа арифметических операций. Большие системы уравнений, возникающие в основном в приложениях, как правило, являются разреженными. Методы исключения для систем с разреженными матрицами неудобны, например, тем, что при их использовании большое число нулевых элементов превращается в ненулевые и матрица теряет свойство разреженности. В противоположность им при использовании итерационных методов в ходе итерационного процесса матрица не меняется, и она, естественно, остается разреженной. Большая эффективность итерационных методов по сравнению с прямыми методами тесно связанна с возможностью существенного использования разреженности матриц.

Задание 1. Решить систему линейных алгебраических уравнений методом Гаусса:

1 вариант	$\begin{cases} 1{,}8x_1 + 2{,}7x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 18{,}5 \\ 0{,}5x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 6 \\ 3{,}6x_1 + 4x_2 + 0{,}9x_3 - 2x_4 = 6{,}3 \\ x_1 - 3x_2 + 2{,}5x_3 + 4x_4 = 1{,}5 \end{cases}$	**6 вариант**	$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 8 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 3 \end{cases}$
2 вариант	$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 3 \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 + 8x_4 = 1 \\ 5x_1 + 18x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 12 \end{cases}$	**7 вариант**	$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ -3x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_3 + 3x_4 = 3 \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 3x_4 = -4 \end{cases}$
3 вариант	$\begin{cases} 10x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 2x_4 = 55{,}1 \\ 3{,}5x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 21{,}8 \\ -2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 5{,}6 \\ 3x_1 + 4{,}4x_2 + 7{,}2x_3 + 1x_4 = 25{,}34 \end{cases}$	**8 вариант**	$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 - 3 = 0 \\ 6x_1 + 9x_2 - 2x_3 - x_4 + 4 = 0 \\ 10x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 2x_4 - 3 = 0 \\ 8x_1 + 6x_2 + x_3 + 3x_4 + 7 = 0 \end{cases}$
4 вариант	$\begin{cases} 5x_1 - 2{,}3x_2 + x_3 - x_4 = -19{,}7 \\ 4x_1 + 1{,}7x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -8{,}3 \\ 3x_1 + 3{,}4x_2 + 3x_3 + x_4 = 6 \\ -10x_1 + 5{,}5x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 19{,}8 \end{cases}$	**9 вариант**	$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 3 \\ 4x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 - 6x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 5 \end{cases}$
5 вариант	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 = 1 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = -2 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 - 4x_4 = -3 \end{cases}$	**10 вариант**	$\begin{cases} x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 7 \\ -x_1 - x_2 + x_3 + 5x_4 = 6 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + 3x_3 - 2x_4 = 5 \end{cases}$

Задание 2 Вычислить определитель методом Гаусса.

1 вариант	$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & -3 & 7 \\ 9 & 1 & -2 & 5 & 9 \\ -5 & 3 & -4 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 5 & -2 & 0 \end{vmatrix}$	**6 вариант**	$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 & -1 \\ 2 & 4 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 5 & 0 & 3 & 7 \\ 10 & -2 & 4 & 7 & 6 \\ 3 & 7 & 5 & -2 & 3 \end{vmatrix}$
2 вариант	$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 10 & -7 \\ 4 & -1 & 2 & 7 & 2 \\ 1 & -1 & 5 & -3 & -2 \\ 1 & 4 & -6 & 1 & 1 \end{vmatrix}$	**7 вариант**	$\begin{vmatrix} 4 & 4 & -8 & 5 & 3 \\ 1 & 5 & 7 & 8 & -1 \\ 4 & 8 & 3 & 5 & 7 \\ 9 & -3 & 5 & 1 & 0 \\ 8 & 4 & -5 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

3 вариант	$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 6 & -5 & 0 \\ 3 & -4 & 8 & 9 & 2 \\ -2 & -1 & 3 & 7 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 & 8 \\ -5 & 5 & -6 & 1 & 0 \end{vmatrix}$	8 вариант	$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 & 4 & 8 \\ 7 & 8 & 0 & 9 & 9 \\ 10 & 3 & -2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & -7 & 4 \\ -2 & 1 & 0 & 4 & -8 \end{vmatrix}$
4 вариант	$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 & 0 \\ 5 & 6 & -4 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 4 & 7 & -5 \\ 6 & -2 & 3 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & -5 \end{vmatrix}$	9 вариант	$\begin{vmatrix} -3 & 2 & -5 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 7 & 0 & 8 & -8 & 4 \\ -5 & -4 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & 5 & -6 & 0 \end{vmatrix}$
5 вариант	$\begin{vmatrix} 0 & 5 & -5 & 2 & 4 \\ -4 & 3 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -3 & 0 \\ -1 & 5 & 1 & -1 & 0 \\ 7 & -8 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$	10 вариант	$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 4 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 7 & 5 \\ 6 & -4 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$

Задание 3 Найти обратную матрицу методом Гаусса.

1 вариант	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	1 вариант	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -5 \\ 2 & 4 & -2 & 1 \\ 5 & 8 & 9 & 3 \\ 3 & 7 & 1 & -1 \end{pmatrix}$
2 вариант	$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ -2 & 2 & 6 & -4 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$	1 вариант	$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & 4 & -3 \\ 3 & 0 & -4 & 5 \\ 5 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$
3 вариант	$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 & -4 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 6 & -2 \\ 1 & -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$	1 вариант	$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 7 & -5 \\ 10 & 6 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & -3 & 9 \\ 8 & 7 & 5 & 4 \end{pmatrix}$
4 вариант	$\begin{pmatrix} -4 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 5 & 4 \\ -4 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$	1 вариант	$\begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 5 \\ -5 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$
5 вариант	$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \\ -4 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$	1 вариант	$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \\ 6 & 4 & -3 & 5 \end{pmatrix}$

Задание 4. Решить систему линейных алгебраических уравнений методами итераций и Зейделя. Сравнить полученные результаты. Проверить результаты любым точным методом:

1 в. $\begin{cases} 15x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 15 \\ x_1 - 15x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 14 \\ x_1 - 4x_2 + 15x_3 + 4x_4 = 16 \\ 2x_1 + 8x_2 + x_3 - 15x_4 = 11 \end{cases}$ **2 в.** $\begin{cases} 30x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 5 \\ 2x_1 + 30x_2 + 10x_3 + x_4 = -5 \\ x_1 + 4x_2 + 30x_3 + 3x_4 = -2 \\ 2x_1 + 8x_2 + 6x_3 + 30x_4 = -11 \end{cases}$

3 в. $\begin{cases} 20x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 = 60 \\ 7x_1 + 20x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 25 \\ -3x_1 + x_2 + 20x_3 - x_4 = -6 \\ -x_1 - x_2 + 4x_3 + 20x_4 = 24 \end{cases}$

4 в. $\begin{cases} 20x_1 - x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 5 \\ 2x_1 + 20x_2 + 10x_3 + x_4 = -5 \\ x_1 + 4x_2 + 20x_3 + 3x_4 = -2 \\ 2x_1 + 8x_2 + 6x_3 + 20x_4 = -11 \end{cases}$ **5 в.** $\begin{cases} 15x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 = 60 \\ 7x_1 + 15x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 25 \\ -3x_1 + x_2 + 15x_3 - x_4 = -6 \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 + 15x_4 = 11 \end{cases}$

6 в. $\begin{cases} 15x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 15 \\ x_1 - 15x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 14 \\ x_1 - 4x_2 + 15x_3 + 4x_4 = 16 \\ 2x_1 + 8x_2 + x_3 - 15x_4 = 11 \end{cases}$

7 в. $\begin{cases} 10x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 18 \\ x_1 + 10x_2 - 2x_3 + x_4 = -14 \\ -x_1 + 4x_2 + 10x_3 + 2x_4 = -24 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 10x_4 = 8 \end{cases}$ **8 в.** $\begin{cases} 15x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -3 \\ -2x_1 + 15x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 12 \\ x_1 - 4x_2 + 15x_3 - 7x_4 = -30 \\ -x_1 - 2x_2 + 7x_3 - 15x_4 = 8 \end{cases}$

9 в. $\begin{cases} 20x_1 - 5x_2 + 6x_3 + x_4 = 0 \\ -3x_1 + 20x_2 - 7x_3 + 5x_4 = -25 \\ x_1 - x_2 + 20x_3 + 3x_4 = -6 \\ -4x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 20x_4 = 25 \end{cases}$

10 в. $\begin{cases} 30x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 = 3 \\ 10x_1 + 30x_2 - 20x_3 + 4x_4 = 6 \\ -12x_1 + x_2 + 30x_3 + 6x_4 = -1 \\ 5x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 30x_4 = 19 \end{cases}$

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какие действия в методе Гаусса называют прямым ходом, а какие обратным?
2. Как проверить правильность нахождения обратной матрицы?

Форма отчета: отчет с решением, ответы на контрольные вопросы, защита

Практическое занятие № 5

Тема: Составление интерполяционных формул Лагранжа, Ньютона, нахождение интерполяционных многочленов сплайнами.

Цель: закрепить навыки составления интерполяционных многочленов Лагранжа, построения кубического сплайна.

Оборудование: тетрадь, ручка, ПК

Методические указания: ознакомьтесь с теоретическими сведениями, выполните задания, ответить на контрольные вопросы

Ход выполнения:

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ:

Задача интерполирования состоит в том, чтобы по значениям функции f(x) в некоторых точках отрезка восстановить ее значения в остальных точках отрезка.

Существует несколько подходов к решению задач интерполяции.

1. Метод Лагранжа. Основная идея этого метода состоит в том, чтобы, прежде всего, найти многочлен, который принимает значение 1 в одной узловой точке и 0 во всех других. Легко видеть, что функция

$$L_j(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\ldots(x-x_{n+1})}{(x_j-x_1)(x_j-x_2)\ldots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\ldots(x_j-x_{n+1})}$$

является требуемым многочленом степени n; он равен 1, если $x=x_j$ и 0, когда $x=x_i$, $i\neq j$. Многочлен $L_j(x)\cdot y_j$ принимает значения y_i в i-й узловой точке и равен 0 во всех других

$$y(x)=\sum_{j=1}^{n+1}L_j(x)y_j$$

узлах. Из этого следует, что есть многочлен степени n, проходящий через n+1 точку (x_i, y_i).

2. Метод Ньютона (метод разделённых разностей). Этот метод позволяет получить аппроксимирующие значения функции без построения в явном виде аппроксимирующего полинома. В результате получаем формулу для полинома P_n, аппроксимирующую функцию f(x):

$P(x)=P(x_0)+(x-x_0)P(x_0,x_1)+(x-x_0)(x-x_1)P(x_0,x_1,x_2)+\ldots+(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)P(x_0,x_1,\ldots,x_n)$;

1. $P(x_0,x_1)=\frac{P(x_0)-P(x_1)}{x_0-x_1}$ — разделённая разность 1-го порядка;

$P(x_0,x_1,x_2)=\frac{P(x_0,x_1)-P(x_1,x_2)}{x_0-x_2}$ — разделённая разность 2-го порядка и т.д.

Значения $P_n(x)$ в узлах совпадают со значениями f(x)

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ:

1. По данной таблице построить интерполяционный многочлен Лагранжа.

Вариант 1			
x	**-1**	**0**	**3**
y	**-3**	**5**	**2**

Вариант 2			
x	**2**	**3**	**5**
y	**4**	**1**	**7**

Вариант 3			
x	**0**	**2**	**3**
y	**-1**	**-4**	**2**

Вариант 4			
x	**7**	**9**	**13**
y	**2**	**-2**	**3**

Вариант 5			
x	**-3**	**-1**	**3**
y	**7**	**-1**	**4**

Вариант 6			
x	**1**	**2**	**4**
y	**-3**	**-7**	**2**

Вариант 7			
x	**-2**	**-1**	**2**
y	**4**	**9**	**1**

Вариант 8			
X	**2**	**4**	**5**
Y	**9**	**-3**	**6**

Вариант 9			
x	**-4**	**-2**	**0**
y	**2**	**8**	**5**

Вариант 10			
x	**-1**	**1,5**	**3**
y	**4**	**-7**	**1**

2. Найти приближенное значение функции в указанной точке.

Вариант 1						
x	**0,43**	**0,48**	**0,55**	**0,62**	**0,7**	**0,75**
y	**1,63597**	**1,73234**	**1,87686**	**2,03345**	**2,22846**	**2,35973**
arg=0,702						
Вариант 2						
x	**0,02**	**0,08**	**0,12**	**0,17**	**0,23**	**0,3**
y	**1,02316**	**1,0959**	**1,14725**	**1,21483**	**1,3012**	**1,40976**
arg=0,102						
Вариант 3						
x	**0,35**	**0,41**	**0,47**	**0,51**	**0,56**	**0,64**
y	**2,73951**	**2,3008**	**1,96864**	**1,78776**	**1,59502**	**1,3431**
arg=0,526						
Вариант 4						
x	**0,41**	**0,46**	**0,52**	**0,6**	**0,65**	**0,72**
y	**2,57418**	**2,32513**	**2,09336**	**1,86203**	**1,74926**	**1,62098**
arg=0,616						
Вариант 5						
x	**0,68**	**0,73**	**0,8**	**0,88**	**0,93**	**0,99**
y	**0,80866**	**0,89492**	**1,02964**	**1,20966**	**1,34087**	**1,52368**
arg=0,896						

Вариант 6						
x	**0,11**	**0,15**	**0,21**	**0,29**	**0,35**	**0,4**
y	**9,05421**	**6,61659**	**4,6917**	**3,35106**	**2,73951**	**2,36522**
arg=0,314						
Вариант 7						
x	**0,43**	**0,48**	**0,55**	**0,62**	**0,7**	**0,75**
y	**1,63597**	**1,73234**	**1,87686**	**2,03345**	**2,22846**	**2,35973**
arg=0,512						

Вариант 8						
x	0,02	0,08	0,12	0,17	0,23	0,3
y	1,02316	1,0959	1,14725	1,21483	1,3012	1,40976
arg=0,114						
Вариант 9						
x	0,35	0,41	0,47	0,51	0,56	0,64
y	2,73951	2,3008	1,96864	1,78776	1,59502	1,3431
arg=0,453						
Вариант 10						
x	0,41	0,46	0,52	0,6	0,65	0,72
y	2,57418	2,32513	2,09336	1,86203	1,74926	1,62098
arg=0,478						

3. Построить эмпирическую формулу для функции y, заданной таблицей (воспользоваться интерполяционной формулой Ньютона):

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1,1	0,048809	0,065602	0,235622	2,024114	3,024114	-0,45119	3,124114	2,624114	3,624114	1,235622
1,2	0,095445	0,129243	0,285172	2,046635	3,046635	-0,40455	3,146635	2,646635	3,646635	1,285172
1,3	0,140175	0,191138	0,337167	2,06779	3,06779	-0,35982	3,16779	2,66779	3,66779	1,337167
1,4	0,183216	0,251465	0,391022	2,087757	3,087757	-0,31678	3,187757	2,687757	3,687757	1,391022
1,5	0,224745	0,310371	0,446254	2,106682	3,106682	-0,27526	3,206682	2,706682	3,706682	1,446254
1,6	0,264911	0,367981	0,502475	2,124683	3,124683	-0,23509	3,224683	2,724683	3,724683	1,502475

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Понятие интерполяции.
2. Отличие интерполяции от экстраполяции.

Форма отчета: отчет с решением, ответы на контрольные вопросы, защита

Практическое занятие № 6

Тема: Вычисление интегралов методами численного интегрирования.

Цель: закрепить навыки составления интерполяционных многочленов сплайнами.

Оборудование: тетрадь, ручка, ПК

Методические указания: ознакомьтесь с теоретическими сведениями, выполните задания, ответить на контрольные вопросы

Ход выполнения:

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ:

Задача интерполирования состоит в том, чтобы по значениям функции f(x) в некоторых точках отрезка восстановить ее значения в остальных точках отрезка.

Сплайн-аппроксимация. Сплайном называется функция, которая вместе с несколькими производными непрерывна на отрезке [a, b], а на каждом частном интервале этого отрезка [x_i, x_{i+1}] в отдельности являются некоторым многочленом невысокой степени. Обычно применяют кубический сплайн, то есть на каждом локальном интервале функция приближается к полиному 3-го порядка.

Кубический сплайн на отрезке [x_i, x_{i+1}] имеет вид:

$$S_3=\frac{(x_{i+1}-x)^2(2(x-x_i)+h)}{h^3}f_i+\frac{(x-x_i)^2(2(x_{i+1}-x)+h)}{h^3}f_{i+1}+\frac{(x_{i+1}-x)^2(x-x_i)}{h^2}m_i+\frac{(x-x_i)^2(x-x_{i+1})}{h^2}m_{i+1}$$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ:

1. Построить кубический сплайн для функции:

1 в. y=cos x, n=5, [0,5π/2]
2 в. $y=3^x$, $x_0=-1$, $x_1=0$, $x_2=1$.
3 в. y=tg x, n=4, [0,2π]
4 в. y=sin2x, n=6, [0,3π]
5 в. y=-cos x, n=5, [0,5π/2]
6 в. y=cos2x, n=4, [0,2π]
7 в. $y=4^x$, $x_0=-1$, $x_1=0$, $x_2=1$
8 в. $y=(1/2)^x$, $x_0=-1$, $x_1=0$, $x_2=1$
9в. y=1/2sinx, n=4, [0,2π]
10 в. y=ctgx, n=6, [0,3π]

2. Построить графики для каждого вида интерполирования функции.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что называется, сплайном?
2. Как выполняется построение кубического сплайна?

Форма отчета: отчет с решением, ответы на контрольные вопросы, защита

Практическое занятие № 7

Тема: Применение численных методов для решения дифференциальных уравнений.

Цель: закрепить навыки решения обыкновенных дифференциальных уравнений различными методами.

Оборудование: тетрадь, ручка, ПК

Методические указания: ознакомьтесь с теоретическими сведениями, выполните задания, ответить на контрольные вопросы

Ход выполнения:

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ:

Решить дифференциальное уравнение $y'=f(x,y)$ (1) численным методом - значит для заданной последовательности аргументов x_0, $x_1\ldots$, x_n и числа y_0, не определяя функцию $y=F(x)$, найти такие значения $y_1, y_2,\ldots, y_n$, что $y_i=F(x_i)(i=1,2,\ldots, n)$ и $F(x_0)=y_0$.

Величина $h=x_k-x_{k-1}$ называется шагом интегрирования.

Метод Эйлера относиться к численным методам, дающим решение в виде таблицы приближенных значений искомой функции y(x).

Рекуррентные формулы метода Эйлера:

$y_{к+1}=y_к+\alpha_к h$

$x_{k+1}=x_k+h$

$\alpha_k=f(x_{k+h/2}, y_k+f(x_k,Y_k)h/2)$

$y_k=y_{k-1}+f(x_{k-1},y_{k-1})h$

Сначала вычисляют вспомогательные значения искомой функции $y_{к+1/2}$ в точках $x_{к+1/2}$, затем находят значение правой части уравнения (1) в средней точке $y'_{k+1/2}=f(x_{k+1/2}, y_{k+1/2})$ и определяют $y_{к+1}$.

Для оценки погрешности в точке $x_к$ проводят вычисления $y_к$ с шагом h, затем с шагом 2h и берут 1/3 разницы этих значений:

$| y_к^*-y(x_к)|=1/3(y_k^*-y_k)$,

где y(x)-точное решение дифференциального уравнения.

Метод Рунге–Кутта 2-го порядка. Состоит в последовательных расчетах по формулам

$$k_1=f(x_m,y_m)$$

$$k_2 = f(x_m + h, y_m + hk_1)$$

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{2}(k_1 + k_2)$$

начиная с точки (x_0, y_0).

Метод Рунге–Кутта 2-го порядка имеет погрешность порядка kh^3.

Метод Рунге–Кутта 4-го порядка. Состоит в последовательных расчетах по формулам:

$$k_1 = f(x_m, y_m)$$

$$k_2 = f\left(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{h}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = f\left(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{h}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = f(x_m + h, y_m + hk_3)$$

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

начиная с точки (x_0, y_0).

Метод Рунге–Кутта 4-го порядка имеет погрешность порядка kh^5

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ:

№ варианта	Уравнение	№ варианта	Уравнение
1	$y' = x + 2y, \mathrm{y}(0) = 1$	2	$y' = e^{-x}, \quad \mathrm{y}(0) = 1$
3	$y' = \dfrac{xy - y^2}{x^2 - 2xy}, \mathrm{y}(1) = 1$	4	$y' = \dfrac{x + y}{x - y}, \mathrm{y}(1) = 0$
5	$y' = \dfrac{2y}{x}, \quad \mathrm{y}(1) = 0$	6	$y' = \dfrac{x - y}{x + y}, \quad \mathrm{y}(1) = 0$
7	$y' = \left(-\dfrac{x}{y}\right), \quad \mathrm{y}(0) = 5$	8	$y' = 2y + 3, \quad \mathrm{y}(0) = 3$
9	$y' = 2y^2 + y, \quad \mathrm{y}(0) = 3$	10	$y' = e^x + 1, \quad \mathrm{y}(0) = 0$
11	$y' = x + 2y^2, \quad \mathrm{y}(0) = 0$	12	$y' = x^2 y + x^3, \quad \mathrm{y}(1) = 0$
13	$y' = x + \dfrac{xy}{x^2 + 1}, \quad \mathrm{y}(0) = 1$	14	$y' = \dfrac{y}{x - 1} + \dfrac{y^2}{x - 1}, \quad \mathrm{y}(0) = 1$
15	$y' = \dfrac{y}{y^2 + x}, \quad \mathrm{y}(1) = 1$	16	$y' = \dfrac{\cos x}{x}, \quad \mathrm{y}(1) = 1$
17	$y' = x^2 + y^2, \quad \mathrm{y}(0) = -1$	18	$y' = x^3 + y^2, \quad \mathrm{y}(0) = 1$
19	$y' = x^3 - y^2, \quad \mathrm{y}(0) = -1$	20	$y' = x^2 + y^3, \quad \mathrm{y}(0) = 0$
21	$y' = x^3 + y^3, \quad \mathrm{y}(0) = 0$	22	$y' = x^3 - y^3, \quad \mathrm{y}(0) = 1$
23	$y' = x + \dfrac{y}{x}, \quad \mathrm{y}(1) = 0$	24	$y' = 1 + x^2 + \dfrac{2xy}{x^2 + 1}, \quad \mathrm{y}(0) = 1$

25	$y'=\dfrac{1}{ln\,x}$, y(2)=1	26	$y'=\dfrac{1}{x+y}$, y(0)=−1
27	$y'=e^{-x}$, y(0)=1	28	$y'=y-x^4$, y(0)=1
29	$y'=3x^2-y^2$, y(1)=1	30	$y'=x^3+2y^2$, y(0)=1

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какое решение дифференциального уравнения называют общим решением? Какое – частным?
2. В чем принципиальное отличие методов Эйлера и Рунге-Кутта?
3. Как вычислить погрешности вычислений при применении методом Эйлера и Рунге-Кутта?

Форма отчета: отчет с решением, ответы на контрольные вопросы, защита

4. ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ

4.1 Основные электронные издания:

О-1. Численные методы: учебник и практикум для среднего профессионального образования / У. Г. Пирумов [и др.]; под редакцией У. Г. Пирумова. — 5-е изд., перераб. и доп. — Москва: Издательство Юрайт, 2024. — 421 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-11634-2. — Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/542793 (дата обращения: 03.05.2024).

О-2. Гателюк, О. В. Численные методы: учебное пособие для среднего профессионального образования / О. В. Гателюк, Ш. К. Исмаилов, Н. В. Манюкова. — Москва: Издательство Юрайт, 2024. — 140 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-07480-2. — Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/538734 (дата обращения: 03.05.2024).

4.2 Дополнительные источники:

Д-1. Колдаев, В.Д. Численные методы и программирование: учебное пособие / Под ред. Л. Г. Гагариной. - М.: "ФОРУМ": ИНФРА-М, 2009. – 336 с.

ЛИСТ ИЗМЕНЕНИЙ И ДОПОЛНЕНИЙ, ВНЕСЕННЫХ В МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

№ изменения, дата внесения, № страницы с изменением	
Было	**Стало**
Основание: **Подпись лица, внесшего изменения**	