ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ИРКУТСКОЙ ОБЛАСТИ «ЧЕРЕМХОВСКИЙ ГОРНОТЕХНИЧЕСКИЙ КОЛЛЕДЖ ИМ. М.И. ЩАДОВА»

РАССМОТРЕНО
на заседании ЦК
«Информатики и ВТ»
Протокол №10
«06» июнь 2023 г.
Председатель: Чипиштанова Д.В.

УТВЕРЖДАЮ
Зам. директора по УР
О.В. Папанова
«07» июнь 2023 г.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

по практическим занятиям студентов

учебной дисциплине

ЕН.01 Элементы высшей математики

программы подготовки специалистов среднего звена по специальности

09.02.07 Информационные системы и программирование

Разработал: Е.А. Литвинцева

2023г.

СОДЕРЖАНИЕ

		СТР.
1.	ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА	3
2.	ПЕРЕЧЕНЬ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ	5
3.	СОДЕРЖАНИЕ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ	6
4.	ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ	85
	ЛИСТ ИЗМЕНЕНИЙ И ДОПОЛНЕНИЙ, ВНЕСЁННЫХ В МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ	86

1. ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Методические указания по практическим занятиям учебной дисциплины **«Элементы высшей математики»** составлены в соответствии с учебным планом и рабочей программой дисциплины по специальности ***09.02.07 Информационные системы и программирование***.

Цель проведения практических занятий: формирование практических умений, необходимых в последующей профессиональной и учебной деятельности.

Методические указания практических занятий являются частью учебно-методического комплекса по учебной дисциплине и содержат:

- тему занятия (согласно тематическому плану учебной дисциплины);

- цель;

- оборудование (материалы, программное обеспечение, оснащение, раздаточный материал и др.);

- методические указания (изучить краткий теоретический материал по теме практического занятия);

- ход выполнения;

- форму отчета.

В результате выполнения полного объема заданий практических (лабораторных) занятий студент должен **уметь:**

- выполнять операции над матрицами и решать системы линейных уравнений;
- решать задачи, используя уравнения прямых и кривых второго порядка на плоскости;
- применять методы дифференциального и интегрального исчисления;
- решать дифференциальные уравнения;
- пользоваться понятиями теории комплексных чисел;
- решать задачи с использованием системы линейных уравнений;
- производить анализ систем линейных уравнений.

При проведении практических работ применяются следующие технологии и методы обучения: работа в группе, информационно – коммуникационные технологии.

Оценка выполнения заданий практических (лабораторных) занятий

«Отлично» - теоретическое содержание курса освоено полностью, без пробелов, умения сформированы, все предусмотренные программой учебные задания выполнены, качество их выполнения оценено высоко.

«Хорошо» - теоретическое содержание курса освоено полностью, без пробелов, некоторые умения сформированы недостаточно, все предусмотренные программой учебные задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками.

«Удовлетворительно» - теоретическое содержание курса освоено частично, но пробелы не носят существенного характера, необходимые умения работы с освоенным материалом в основном сформированы, большинство предусмотренных программой обучения учебных заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки.

«Неудовлетворительно» - теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки.

В соответствии с учебным планом и рабочей программы дисциплины **«Элементы высшей математики»** на практические (лабораторные) занятия отводится **50 часов.**

2. ПЕРЕЧЕНЬ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

№ п/п	Тема практических занятий	Количество часов
1.	Решение задач с комплексными числами	2
2.	Решение задач по теории пределов	2
3.	Решение задач по теории пределов	2
4.	Решение задач по нахождению производной	2
5.	Решение задач по нахождению производной	2
6.	Решение задач по вычислению определенного и неопределенного интегралов	2
7.	Решение задач по вычислению определенного и неопределенного интегралов	2
8.	Решение задач по вычислению частных производных	2
9.	Решение задач по вычислению частных производных	2
10.	Решение задач по нахождению производных высших порядков	2
11.	Решение задач по интегральному исчислению функций нескольких действительных переменных	2
12.	Решение задач по интегральному исчислению функций нескольких действительных переменных	2
13.	Решение задач по теории рядов	2
14.	Решение задач по теории рядов	2
15.	Решение задач по теории рядов	2
16.	Решение задач по ОДУ	2
17.	Решение задач по матрицам	2
18.	Решение задач по матрицам	2
19.	Решение задач по системам линейных уравнений	2
20.	Решение задач по системам линейных уравнений	2
21.	Решение задач по векторам	2
22.	Решение задач по векторам	2
23.	Решение задач по векторам	2
24.	Решение задач по аналитической геометрии	2
25.	Решение задач по аналитической геометрии	2

3. СОДЕРЖАНИЕ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

Практическое занятие № 1

Тема: Решение задач с комплексными числами

Цель: закрепить усвоение теоретического материала по данной теме через решение упражнений; закрепить умения выполнять арифметические действия над комплексными числами в алгебраической форме.

Оборудование: тетрадь, ручка

Методические указания:

Теоретический материал и методические указания к выполнению заданий

Действия над комплексными числами в алгебраической форме

Пусть даны два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$.

1) **Сложение (вычитание):**

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2).$$

Пример. $z_1 = 2 - 3i$, $z_2 = 1 + 4i$.

$z_1 + z_2 = (2 - 3i) + (1 + 4i) = 3 + i$.

$z_1 - z_2 = (2 - 3i) - (1 + 4i) = 1 - 7i$

2) **Умножение:**

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1).$$

В частности,

$$i^2 = -1, \quad z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2.$$

Пример. $z_1 = 2 - 3i$, $z_2 = 1 + 4i$.

$z_1z_2 = (2 - 3i)(1 + 4i) = 2 - 3i + 8i - 12i^2 = 2 + 5i + 12 = 14 + 5i$

3) **Деление:**

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \quad (z_2 \neq 0).$$

Пример. $z_1 = 2 - 3i$, $z_2 = 1 + 4i$.

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}} = \frac{(2 - 3i)(1 - 4i)}{(1 + 4i)(1 - 4i)} = \frac{2 - 8i - 3i + 12i^2}{1 + 16} = \frac{-10 - 11i}{17} = -\frac{10}{17} - \frac{11}{17}i$

Все арифметические операции над комплексными числами проводятся по правилам действий над многочленами $x_1 + iy_1$ и $x_2 + iy_2$, при этом i^2 заменяется на -1.

Пример. Вычислить $z = \frac{1 + i}{(1 - i)^2}$.

Решение. $z = \frac{1+i}{1-2i+i^2} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1+i}{i} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{(1+i)i}{i^2} = \frac{1}{2}(i+i^2) = -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$.

Пример Вычислить: i^2, i^3, i^4, i^5, i^6, i^{-1} , i^{-2}.

$$i^2 = i\cdot i = -1$$

$$i^3 = i^2\cdot i = -i$$

$$i^4 = i^3\cdot i = -i\cdot i = -(-1) = 1$$

$$i^5 = i^4\cdot i = i$$

$$i^6 = i^5\cdot i = i\cdot i = -1$$

$$i^{-1} = \frac{1}{i} = \frac{i}{i\cdot i} = -i$$

$$i^{-2} = \frac{1}{i^2} = -1.$$

Ход выполнения:

Вариант 1

1. Даны два комплексных числа: $z_1=8+3i$, $z_2=8+6i$.
   Найти а) z_1+z_2; б) z_1-z_2; в) z_1z_2; г) z_1/z_2.
2. Выполнить действия в алгебраической форме:
   а) $\frac{7-2i}{3+4i}$; б) $(6-i)(2+5i)$; в) $(7-2i)-(4+3i)$. г) $\left(\frac{1}{1-i}\right)^2$
3. Вычислить: i^{21}, i^{-5}.
4. Вычислить $\frac{2+i}{2-i}-(3+4i)+\frac{4-i}{3+2i}$.
5. . Найти решение уравнений ($x, y \in \mathbf{R}$):
   а) $(1 + i)x + (2 + i)y = 5 + 3i$;
   б) $2x + (1 + i)(x + y)=7 +i$;
   в) $(3 – y + x)(1 + i) + (x – y)(2 + i) = 6 – 3i.$

Вариант 2

1. Даны два комплексных числа: $z_1=2-5i$, $z_2=6-8i$.
   Найти а) z_1+z_2; б) z_1-z_2; в) z_1z_2; г) z_1/z_2.
2. Выполнить действия в алгебраической форме:
   а) $\frac{3-2i}{1+3i}$; б) $(-2-i)(1+i)$; в) $(3+i)(-3-8i)$; г) $\left(\frac{1}{1+2i}\right)^2$
3. Вычислить: i^{12}, i^{-3}.
4. Вычислить $\frac{3+i}{2-i}-(3+5i)+\frac{7-i}{3+i}$
5. . Найти решение уравнений ($x, y \in \mathbf{R}$):
   а) $(1 + i)x + (5 + i)y = 4 + 3i$;

б) $3x + (5 + i)(x + y)=12 +2i$;
в) $(2 – y + x)(3 + i) + (x – y)(2 + i) = 8 – 3i$.

Вариант 3

1. Даны два комплексных числа: $z_1=3+7i$, $z_2= -8+6i$.
Найти а) z_1+z_2; б) z_1-z_2; в) z_1z_2; г) z_1/z_2.
2. Выполнить действия в алгебраической форме:
а) $\frac{3+i}{4-5i}$ б) $(3 – 2i)(5 + 3i)$; в) $(1 + 2i) – (3 –5i)$. г) $\left(\frac{1}{3-i}\right)^2$
3. Вычислить: i^{17}, i^{-4}.
4. Вычислить $\frac{2+i}{5-i}-(5+4i)+\frac{4-i}{1+2i}$
5. . Найти решение уравнений ($x, y \in \mathbf{R}$):
а) $(1 + i)x + (4 + i)y = 8 + 2i$;
б) $3x + (2 + i)(x + y)=14 +3i$;
в) $(4 – y + x)(3 + i) + (x – y)(2 +3 i) = 5 – 4i$.

Вариант 4

1. Даны два комплексных числа: $z_1=5-4i$, $z_2=2+3i$.
Найти а) z_1+z_2; б) z_1-z_2; в) z_1z_2; г) z_1/z_2.
2. Выполнить действия в алгебраической форме:
а) $\frac{3-7i}{4+i}$; б) $(1 + 3i)(–7 + 4i)$; в) $(3 – 7i) + (5 + 3i)$; г) $\left(\frac{1}{1+3i}\right)^2$
3. Вычислить: i^{19}, i^{-2}.
4. Вычислить $\frac{2+i}{3-i}-(-5+4i)+\frac{9-i}{5+2i}$
5. . Найти решение уравнений ($x, y \in \mathbf{R}$):
а) $(5 + i)x + (1 + i)y = 5 + 2i$;
б) $6x + (4 + i)(x + y)=10 +3i$;
в) $(3 – y + x)(5 + i) + (x – y)(4 + i) = 9 – 2i$.

Форма отчета: задачи

Практическое занятие № 2

Тема: Решение задач по теории пределов

Цель: отработать навыки вычисления предела функции

Оборудование: тетрадь, ручка

Методические указания:

Предел функции

Пусть дана функция: $y = f(x)$.

Определение. Число $\boldsymbol{A}$ называется пределом функции $f(x)$ при $x \to a$, если для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что $|f(x) - \boldsymbol{A}| < \varepsilon$ при $0 < |x - \boldsymbol{a}| < \delta$.

Это записывают так:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A$$

Теоремы о пределах
(правила предельного перехода)

1. Предел суммы или разности равен сумме или разности пределов.

$$\lim(x \pm y) = \lim x \pm \lim y$$

2. Предел произведения равен произведению пределов.

$$\lim(x \cdot y) = \lim x \cdot \lim y$$

3. Предел отношения равен отношению пределов.

$$\lim(x / y) = \lim x / \lim y, \quad \lim y \neq 0.$$

Свойства пределов.

1. Предел постоянной равен этой постоянной.

$$\lim A = A, \text{ если } A = \text{const}.$$

2. Постоянную можно вынести за знак предела.

$$\lim(c \cdot y) = c \cdot \lim y, \text{ если } c = \text{const}.$$

3. Если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to a} g(x)$, то

$$\lim_{x \to a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \to a} f(x)^{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$$

4. Если существует $\lim\limits_{x \to a} g(x)$ и $f(x)$ – элементарная функция, то

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \to a} g(x)\right)$$

Например:

$$\lim_{x \to a} \sqrt{g(x)} = \sqrt{\lim_{x \to a} g(x)},$$

$$\lim_{x \to a} \log_c g(x) = \log_c \lim_{x \to a} g(x).$$

Понятие бесконечно малой и бесконечно большой величины.

Если предел функции равен нулю ($\ell imy = 0$), то она называется бесконечно малой величиной.

Если предел функции равен бесконечности ($\ell imy = \infty$), т.е. величине, обратной к бесконечно малой величине, то она называется бесконечно большой величиной.

Следовательно, выполняются равенства

$$\ell im\frac{1}{0} = \infty,\ \ell im\frac{1}{\infty} = 0.$$

Найти следующие пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{5x+2}{2x+3}$.

Δ Так как x → 4, то числитель дроби стремится к числу

$5 \cdot 4 + 2 = 22$, а знаменатель – к числу $2 \cdot 4 + 3 = 11$. Следовательно,

$$\lim_{x\to 4}\frac{5x+2}{2x+3} = \frac{22}{11} = 2.$$

2. $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\dfrac{x^2-3}{x^4+x^2+1} = \dfrac{3-3}{9+3+1} = \dfrac{0}{13} = 0$

3. $\lim\limits_{x\to -1}(x^3-x^2+1) = -1-1+1 = -1$

4. $\lim\limits_{x\to 0}(3x^3+x^2-8x+10) = 0+0-0+10 = 10$

Но при простой подстановке может получиться неопределенность типа $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$. Эти случаи рассмотрим далее.

Ход выполнения:

Найти пределы функций:

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2x+2}{x^2-1}$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2+x}{4x^3+x+10}$

3. $\lim\limits_{x\to 0,1}\dfrac{5x+4}{1-x}$

4. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-4x+5}{x^2+6}$

5. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+3)(x-2)}{x+2}$

6. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3}{2x-6}$

7. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-5x-3}{4x^2-13x+3}$

8. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x^2-5x-1}{2x^2-x-1}$

Форма отчета: задачи

Практическое занятие № 3

Тема: Решение задач по теории пределов

Цель: отработать навыки вычисления предела функции

Оборудование: тетрадь, ручка

Методические указания:

Раскрытие неопределенности вида $\frac{0}{0}$.

Для раскрытия неопределенности такого вида необходимо предварительно сократить дробь (разложив на множители), а затем найти предел.

Например:

1. $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x^2-3x}$.

Δ Здесь числитель и знаменатель дроби при x → 3 стремятся к нулю(неопределенность вида $\frac{0}{0}$). Имеем

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x^2-3x} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+3)}{x(x-3)} = \lim_{x\to 3} \frac{x+3}{x} = \frac{3+3}{3} = 2 .$$

2. $\lim\limits_{x\to 5} \frac{x^2-7x+10}{x^2-9x+20} = \lim\limits_{x\to 5} \frac{(x-5)(x-2)}{(x-5)(x-4)} = \lim\limits_{x\to 5} \frac{x-2}{x-4} = \frac{3}{1} = 3$,

где необходимо было решить квадратные уравнения для разложения квадратного трехчлена на множители в числителе и в знаменателе дроби по формуле $ax^2+bx+c = (x-x_1)(x-x_2)$.

3.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{1+3x}-1} = \lim_{x\to 0} \frac{x(\sqrt{1+3x}+1)}{(\sqrt{1+3x}-1)(\sqrt{1+3x}+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{x(\sqrt{1+3x}+1)}{1+3x-1} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x(\sqrt{1+3x}+1)}{3x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+3x}+1}{3} = \frac{2}{3},$$

Раскрытие неопределенности вида $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Для раскрытия неопределенности такого вида необходимо числитель и знаменатель разделить на ***x*** с наибольшим показателем степени.

Например:

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^4 - x^2 + 2}{x^3 - x + 1} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1 - \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{2}{x^4}}{\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^3} + \dfrac{1}{x^4}} = \dfrac{1}{0} = \infty$

2. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3 + x^4}{x^5 + x^6} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\dfrac{x^3}{x^6} + \dfrac{x^4}{x^6}}{\dfrac{x^5}{x^6} + \dfrac{x^6}{x^6}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\dfrac{1}{x^3} + \dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{1}{x} + 1} = \dfrac{0}{1} = 0$

3. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{10x^2 - x - 6}{3x - x^2} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{10 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{6}{x^2}}{\dfrac{3}{x} - 1} = \dfrac{10}{-1} = -10$

Ход выполнения:

Задания для самостоятельной работы.

Найти пределы функций:

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x^3 + x}{x}$
2. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 2x - 3}$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$
4. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2 - 4}{x + 2}$
5. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{3 - x}{x^3 - 27}$
6. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{3x^2 - 11x + 6}{2x^2 - 5x - 3}$
7. $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x - 5}{2 - \sqrt{x-1}}$
8. $\lim\limits_{x\to \sqrt{5}} \dfrac{x^4 - 25}{x^2 - 5}$
9. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x - 3}{x^2 - 9}$
10. $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2 - 8x + 15}{x^2 - 25}$

Найти пределы функций:

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3 - 2x + 6}{3x^3 + x^2 - 26}$
2. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x + 5}$
3. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2 - 2x + 5}{x^3 + 3x + 7}$
4. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^3 - 4x + 8}{5x^3 + 27x^2 + x}$

Форма отчета: задачи

Практическое занятие № 4

Тема: Решение задач по нахождению производной

Цель: закрепить умения исследовать функции методами дифференциального исчисления, строить их графики.

Оборудование: тетрадь, ручка

Методические указания:

Теоретический материал и методические указания к выполнению заданий

При исследовании функций и построении их графиков рекомендуется использовать следующую схему:

1. Найти область определения функции.
2. Исследовать функцию на четность-нечетность.
3. Найти вертикальные асимптоты.
4. Исследовать поведение функции в бесконечности, найти горизонтальные и наклонные асимптоты.
5. Найти экстремумы и интервалы монотонности функции.
6. Найти интервалы выпуклости функции и точки перегиба.
7. Найти точки пересечения с осями координат и, возможно, некоторые дополнительные точки, уточняющие график.

Заметим, что исследование функции проводится одновременно с построением ее графика.

<u>Исследовать функцию и построить ее график:</u>

$y=\dfrac{1+x^2}{1-x^2}$.

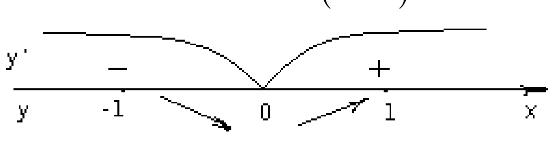
РЕШЕНИЕ:

1. Область определения $(-\infty,1)\cup(-1,1)\cup(1,\infty), т.е.\ x\neq\pm1$.
2. Функция четная, т.к. $f(-x)=f(x)$, и ее график симметричен относительно оси ординат.
3. Вертикальные асимптоты могут пересекать ось абсцисс в точках –1, 1 .

$\lim\limits_{x\to1+0}\dfrac{1+x^2}{1-x^2}=-\infty$ *и* $\lim\limits_{x\to1-0}\dfrac{1+x^2}{1-x^2}=+\infty$, то прямая x=1 есть вертикальная асимптота. В силу симметрии графика $f(x)$ x=-1 также вертикальная асимптота.

4. Поведение функции в бесконечности. Вычислим $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+x^2}{1-x^2}=-1$. В силу четности также имеем $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1+x^2}{1-x^2}=-1$, т.е. прямая $y=-1$ – горизонтальная асимптота.
5. Экстремумы и интервалы монотонности.

Найдем $y'=\dfrac{2x(1-x^2)-(1+x^2)(-2x)}{(1-x^2)^2}=\dfrac{4x}{(1-x^2)^2}$;



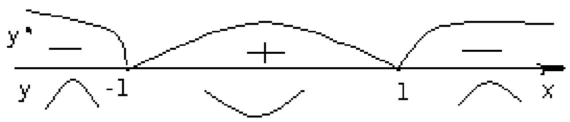
$y'=0$ при $x=0$ и y' не существует при $x=1$, $x=-1$.

Однако критической является только точка $x=0$.

$x=0$ – точка минимума и $f_{min}=f(0)=1$ – минимум функции.

6. Интервалы выпуклости и точки перегиба.

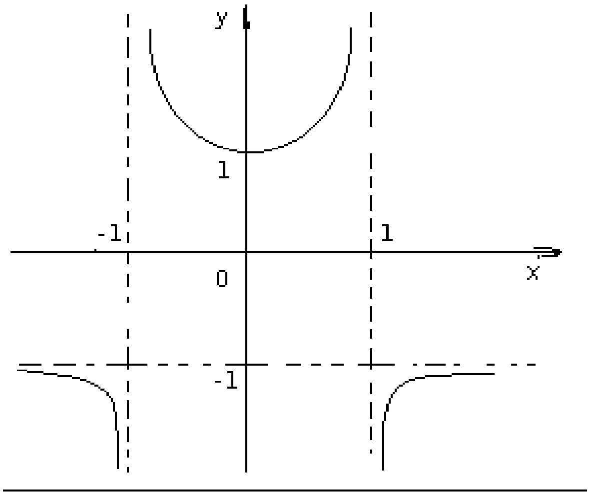
Найдем $y''=\dfrac{4(1-x^2)^2-4x\cdot 2(1-x^2)(-2x)}{\left(1-x^2\right)^4}=\dfrac{4(1+3x^2)}{\left(1-x^2\right)^3}$.



Точек перегиба нет.

7. **Точки пересечения с осями. $f(0)=1$, т.е. точка пересечения с осью ординат (0,1). Уравнение $f(x)=0$ решений не имеет, следовательно, график функции не пересекает ось абсцисс.**

Построим график функции.



Ход выполнения:

Вариант 1

Исследовать заданные функции методами дифференциального исчисления, начертить их графики.

а $y=2x^3-9x^2+12x-5;$

б $y=\dfrac{x+1}{x}.$

в $y=x-\ln(x+2).$

Вариант 2

Исследовать заданные функции методами дифференциального исчисления, начертить их графики.

а $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 1;$

б $y = \dfrac{x}{x-1}.$

в $y = \left(2 + x^2\right) \cdot e^{-x^2}.$

Вариант 3

Исследовать заданные функции методами дифференциального исчисления, начертить их графики.

а $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 10;$

б $y = \dfrac{x-3}{x+2}.$

в $y = (x-1) \cdot e^{3x+1}.$

Вариант 4

Исследовать заданные функции методами дифференциального исчисления, начертить их графики.

а $y = x^3 + 6x^2 + 9x + 2;$

б $y = \dfrac{x+9}{x+4}.$

в $y = x \cdot e^{-x^2}.$

Форма отчета: задачи

Практическое занятие № 5

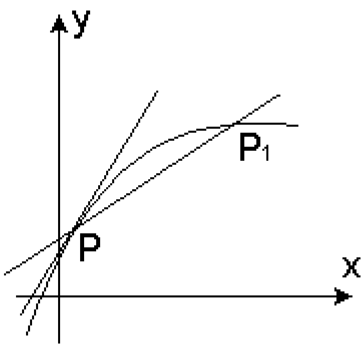
Тема: Решение задач по нахождению производной

Цель: научиться строить уравнение касательной к графику функции .

Оборудование: тетрадь, ручка

Методические указания:

Теоретический материал и методические указания к выполнению заданий



Определение касательной к графику функции y=f(x)

Пусть дана некоторая кривая и точка P на ней. Возьмем на этой кривой другую точку P1 и проведем прямую через точки P и P1. Эту прямую называют секущей. Будем приближать точку P1 к P. Положение секущей PP1 будет меняться (стремиться к точки P) предельное положение прямой PP1 и будет касательной к кривой в точке P.

Уравнение вида **y=f(a)+f'(a)(x-a)** является **уравнением касательной** к графику функции.

Алгоритм составления касательной к графику функции y=f(x)

1. Обозначить буквой а абсциссу точки касания.
2. Найти f(a).
3. Найти f'(x) и f'(a).
4. Подставить найденные числа a, f(a), f'(a) в общее уравнение касательной y=f(a)+f'(a)(x-a)

Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых.

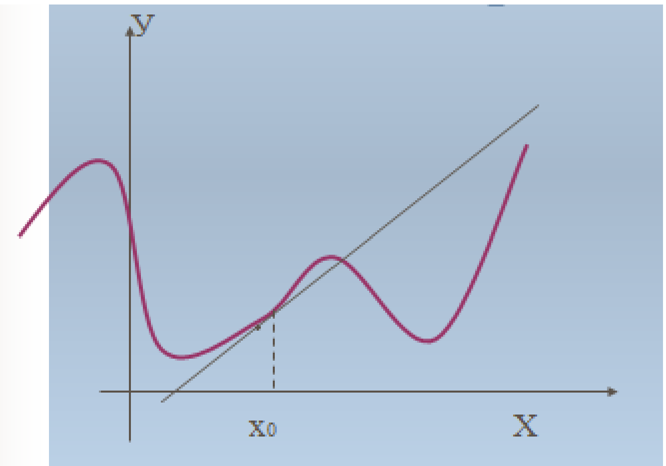
Пусть даны две прямые: y1=k1x+b1 и y2=k2x+b2.

Если k1= k2, то прямая y1 параллельна y2.

Если k1·k2=–1, то данные прямые взаимно перпендикулярны

Рассмотрим задачи на касательную

1. Касательная проходит через точку, лежащую на данной кривой



Даны дифференцируемая функция y=f(x) и

1) точка A(n;m) через которую проходит касательная;

2) точка A(n;m) задана как пересечение двух графиков функций;

3) точка A(n;m) задана как корень системы уравнений.

Ключевая задача 1.

Составьте уравнение касательной к графику функции $y=x^2–2x–3$ в точке с абсциссой $x_0=2$.

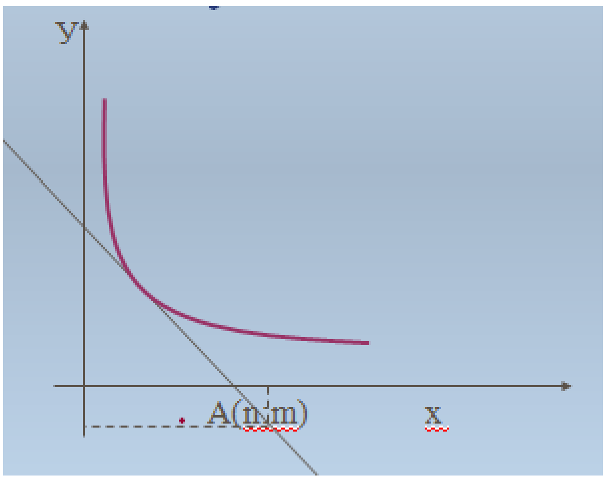
Решение.

1. Обозначим абсциссу точки касания a, тогда a=2.
2. Найдем f(a): $f(a)=2^2–2·2–3$, f(a)=-3.
3. Найдем f' (x) и f'(a): f'(x)=2x–2, f'(a)=2.
4. Подставим найденные числа a, f(a), в общее уравнение касательной y=f(a)+f'(a)(x–a): y=-3+2(x–2),

y=-3+2x–4, y=2x–7 – уравнение касательной.

Ответ: y=2x –7.

2. Касательная проходит через точку, не лежащую на данной кривой



Даны дифференцируемая функция y=f(x) и

1) точка A(n;m) через которую проходит касательная;

2) точка A(n;m) задана как пересечение двух графиков функций;

3) точка A(n;m) задана как корень системы уравнений.

Ключевая задача 2.

Напишите уравнение всех касательных к графику функции

$y = x^2 +4x+6$ проходящих через точку M(-3;-1).

Решение. 1. Точка M(-3;-1) не является точкой касания, так как $f(-3)=3$.

2. a – абсцисса точки касания.

3. Найдем f(a): $f(a) = a^2+4a+6$.

4. Найдем f'(x) и f'(a): $f'(x)=2x+4$, $f'(a)=2a+4$.

5. Подставим числа a, f(a), в общее уравнение касательной

$y= f(a)+ f'(a)(x–a)$: $y=a^2+4a+6+(2a+4)(x–a)$ – уравнение касательной.

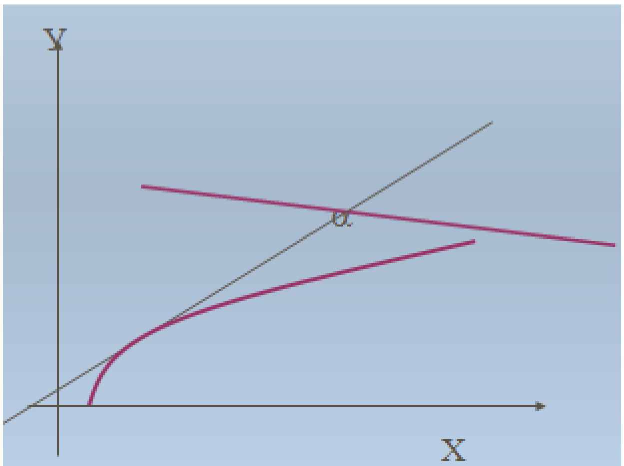
Так как касательная проходит через точку M(-3;-1), то $-1=a^2+4a+6+(2a+4)(-3–a)$, $a^2+6a+5=0$, $a=-5$ или $a=-1$.

Если $a=-5$, то $y=-6x–19$ – уравнение касательной.

Если $a=-1$, $y=2x+5$ – уравнение касательной.

Ответ: $y=-6x–19$, $y=2x+5$.

3. Касательная проходит под некоторым углом к данной прямой



Ключевая задача 3. Напишите уравнения всех касательных к графику функции $y=x^2–2x–8$, параллельных прямой $y=-4x–4$.

Решение. 1. Обозначим абсциссу точки касания a.

2. Найдем f(a): $f(a)=a^2–2a–8$.

3. Найдем f'(x) и f'(a): $f'(x)=2x–2$, $f'(a)=2a–2$.

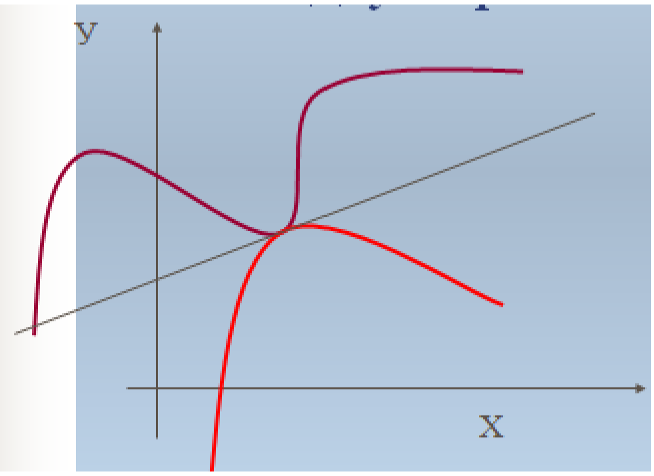
Но, с другой стороны, $f'(a)= - 4$ (условие параллельности). Решив уравнение $2a–2= - 4$, получим $a= - 1$, $f(a)= - 5$.

Подставим найденные числа a, f(a), в общее уравнение касательной $y=f(a)+f'(a)(x-a)$: $y=-5–4(x+1)$,

$y= - 4x–9$ – уравнение касательной.

Ответ: $y= - 4x–9$.

4. Касательная является общей для двух кривых



<u>Ключевая задача 4.</u> Напишите уравнения всех общих касательных к графикам функций $y=x^2+x+1$ и. $y=0{,}5(x^2+3)$.

<u>Решение.</u> I 1. a – абсцисса точки касания графика функции $y=x^2+x+1$

2. Найдем f(a): $f(a)=a^2+a+1$.
3. Найдем f'(x) и f'(a): $f'(x)=2x+1$, $f'(a)=2a+1$.
4. Подставим a, f(a), в общее уравнение касательной

$y=f(a)+f'(a)(x–a)$: $y=a^2+a+1+(2a+1)\cdot(x–a)$, $y=(2a+1)x–a^2+1$ – уравнение касательной.

II. 1. c – абсцисса точки касания графика функции $y=0{,}5(x^2+3)$.

2. Найдем f(c): $f(c)=0{,}5c^2+1{,}5$.
3. Найдем f'(x) и f'(c): $f'(x)=x$, $f'(c)=c$.
4. Подставим a, f(a), в общее уравнение касательной $y=f(a)+f'(a)(x–a)$:

$y=0{,}5c^2+1{,}5+c(x–c)$, $y=cx–0{,}5c^2+1{,}5$ – уравнение касательной.

Так как касательная общая, то $\begin{cases} 2a+1=c, \\ –a^2+1=–0{,}5c^2+1{,}5 \end{cases}$ $\begin{cases} c=1, \\ a=0; \end{cases}$ или $\begin{cases} c=-3 \\ a=-2 \end{cases}$

Итак, $y=x+1$ и $y=-3x–3$ общие касательные.

<u>Ответ:</u> $y=x+1$ и $y=–3x–3$.

Пример: Является ли данная прямая касательной к графику функции y=f(x)?
Даны дифференцируемая функция y=f(x) и уравнение прямой y=kx+b. Выясните, является ли данная прямая касательной к графику функции y=f(x).

Решение:
1 способ.
Если y=kx+b – уравнение к графику функции в точке с абсциссой a, то f'(a)=k. Решив это уравнение, находим a и задача сводится к решению первого типа задач на касательную. Полученное уравнение сравнивается с данным уравнением прямой.
2 способ.
Прямая y=kx+b является касательной к графику функции y=f(x) в том и только том случае, если существует такое значение a, при котором совпадают значения данных функций и значения их производных, т. е. Совместна система уравнений:
f(a)=ka+b, f'(a)=k.

Ход выполнения:

1. Дана функция $y=x^3$. Составить уравнение касательной к графику этой функции в точке $x_0=2$.
2. Составить уравнение касательной к графику функции f(x)=2sinx+5 в точке $x_0=\Pi/2$
3. Найдите тангенс угла наклона касательной к графику функции $y=1/x+\sqrt{x}$ в точке $x_0=1/4$
4. В какой точке графика функции $y=4/x^2+2x$ тангенс угла наклона касательной равен 3?
5. В какой точке графика функции $y=8\sqrt{x}+2x$ тангенс угла наклона касательной равен 2?
6. Напишите уравнение касательной к графику функции $y=x^2-2x+1$ в точке $x_0=2$

7. Напишите уравнение касательной к графику функции $y=x^2+2x+1$ в точке $x_0=1$

Форма отчета: задачи

Практическое занятие № 6

Тема: Решение задач по вычислению определенного и неопределенного интегралов

Цель: отработать навыки по вычислению определенного и неопределенного интеграла

Оборудование: тетрадь, ручка

Методические указания:

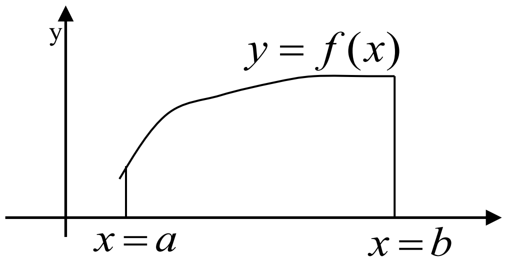
Теоретический материал и методические указания к выполнению заданий

Греческий физик и математик. Ему принадлежит метод нахождения длин и площадей, предвосхитивший интегральное исчисление. Закон Архимеда – один из фундаментальных законов физики. «Внимательно читая сочинения Архимеда, перестаешь удивляться всем новейшим открытиям геометрии»,- сказал о нем Лейбниц.

КОРОТКО ОБ ИНТЕГРАЛЕ МОЖНО СКАЗАТЬ ТАК - **ИНТЕГРАЛ – ПЛОЩАДЬ:**

Пусть функция f(x) непрерывна и неотрицательна на отрезке [a;b]. Тогда площадь соответствующей КРИВОЛИНЕЙНОЙ ТРАПЕЦИИ находится по формуле Ньютона-Лейбница:

$$S=\int_a^b f(x)dx = F(a)\,|_a^b = F(b)-F(b)$$

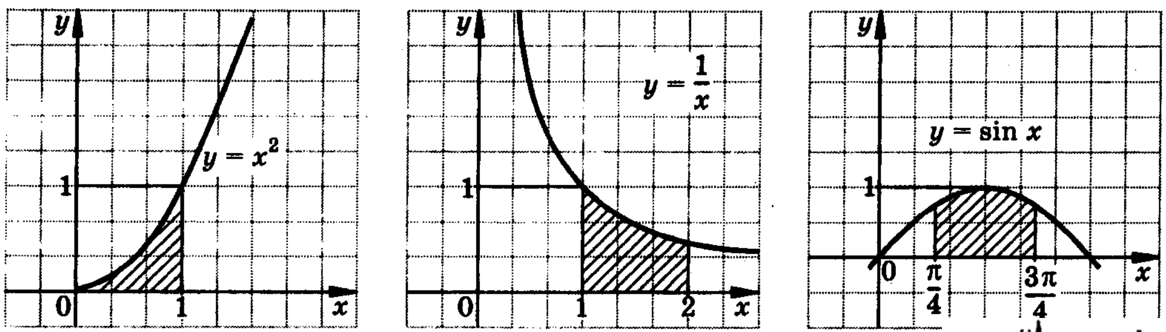


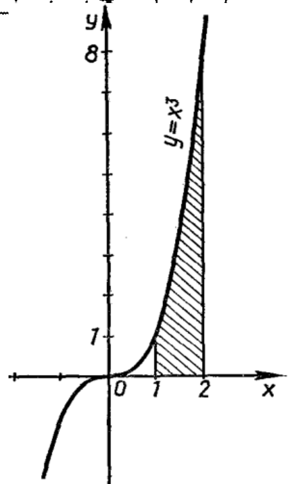
Интегралом от функции f на отрезке [a;b] называется площадь ее подграфика на этом отрезке.

Если при этом график функции пересекает ось Ox, то части подграфика, расположенные ниже оси Ox, берутся со знаком минус.

Криволинейная трапеция – фигура, ограниченная прямыми y=0; x=a; x=b и графиком непрерывной и неотрицательной на [a;b] функции f(x).

Примеры:





I. Площадь криволинейной трапеции

Пример 1.

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^3, y=0, x=1.$

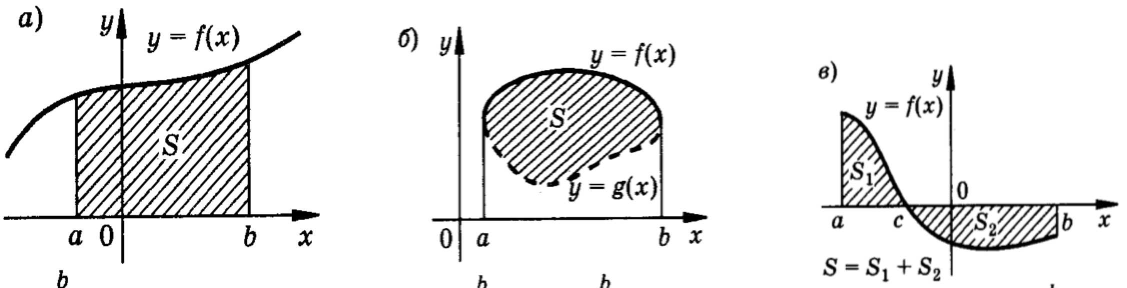
Решение:

$$S=\int_1^2 x^3dx = \frac{x^4}{4}\Big|_1^2 = \frac{2^4}{4}-\frac{1^4}{4}=\frac{15}{4}=3\frac{3}{4}$$

II. Площадь фигуры, ограниченной несколькими линиями

Если требуется вычислить площадь фигуры, ограниченной несколькими линиями, то находят криволинейные трапеции, пересечение или объединение которых есть данная фигура, вычисляют площадь каждой из них и находят разность или сумму площадей этих криволинейных трапеций.

Формулы вычисления площади с помощью интеграла:

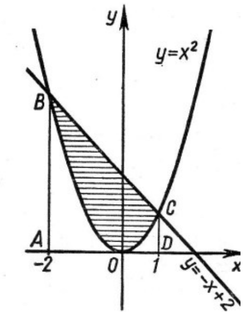


$$S=\int_a^b f(x)dx$$

$$S=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx$$

$$S_1=\int_a^c f(x)dx;\quad S_2=-\int_c^b f(x)dx$$

Пример 2.



Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2,\ y=-x+2.$

Решение:

$S=S_{ABCD}-S_{ABOCD}$

Для нахождения пределов интегрирования решаем уравнение:

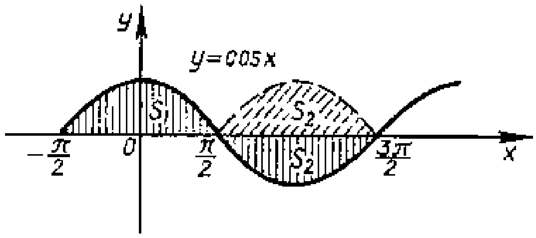
$$x^2=-x+2,$$
$$x^2+x-2=0,$$
$$x_1=-2,$$
$$x_2=1.$$

Искомая площадь:

$$S=\int_{-2}^{1}(-x+2)dx-\int_{-2}^{1}x^2dx=(-\frac{x^2}{2}+2x)\Big|_{-2}^{1}=(-\frac{1}{2}+2)-(-\frac{4}{2}-4)-\frac{1}{3}-\frac{8}{3}=1{,}5+6-3=4{,}5$$

Пример 3.

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\cos x,\ y=0,$ если $-\dfrac{\Pi}{2}\le x\ge\dfrac{3\Pi}{2}.$



Решение:

$$S=S_1+S_2,$$

$$S_1=\int_{\frac{-\Pi}{2}}^{\frac{\Pi}{2}}cosxdx=\sin x\Big|_{\frac{-\Pi}{2}}^{\frac{\Pi}{2}}=\sin\frac{\Pi}{2}-\sin\left(\frac{-\Pi}{2}\right)=1-(-1)=2,\quad S_2=\int_{\frac{\Pi}{2}}^{\frac{3\Pi}{2}}(-\cos x)dx=2,$$

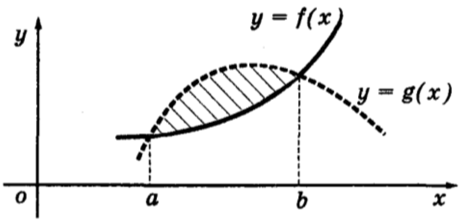
$$S=2+2=4.$$

III. Запись площади через интеграл

Пример 4:

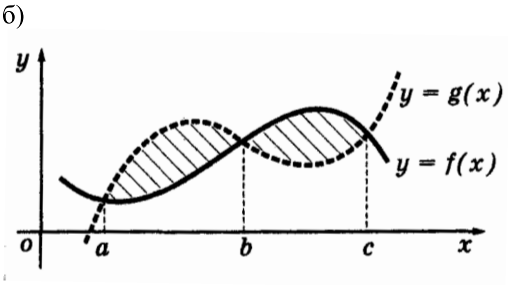
Запишите площадь заштрихованных фигур с помощью интегралов:

а)



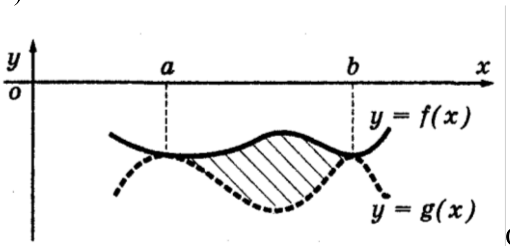
Ответ: $\int\limits_a^b (g(x) - f(x))dx$

б)



Ответ: $\int\limits_a^b (g(x) - f(x))dx + \int\limits_a^b (f(x) + g(x))dx$

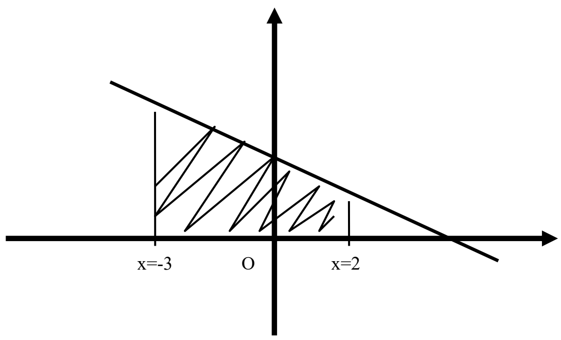
в)



Ответ: $\int\limits_a^b (f(x) - g(x))dx$

Задача 1:
Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: x+2y+4=0, y=0, x=-3 и x=2
Решение:

1. Выразим функцию y: $y=-^1/_2x-4$
2. Построим все линии в координатной плоскости:



3. По формуле а) для функции f(x)=-0,5x-4 имеем:

$$S = \int\limits_{-3}^{2} (-0{,}5x + 2)dx = (-0{,}25x^2 + 2x)\Big|_{-3}^{2} = 11{,}25\,(кв.ед.)$$

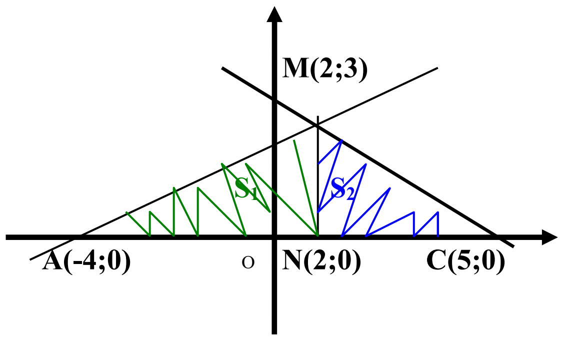
Задача 2:
Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: x-2y+4=0, x+y-5=0 и y=0.
Решение:

1. Выразим функцию y: $y_1=^1/_2x+2$ и $y_2= -x+5$
2. Выполним построение фигуры в координатной плоскости:

для прямой y_1 точки (-4;0) и (0;2);
для прямой y_2 точки (5;0) и (0;5);

3. Найдем точку пересечения прямых:

$$\begin{cases} y = 0{,}5x + 2 \\ y = -x + 5 \end{cases} \Rightarrow x = 2;\ y = 3 \quad M(2;3)$$

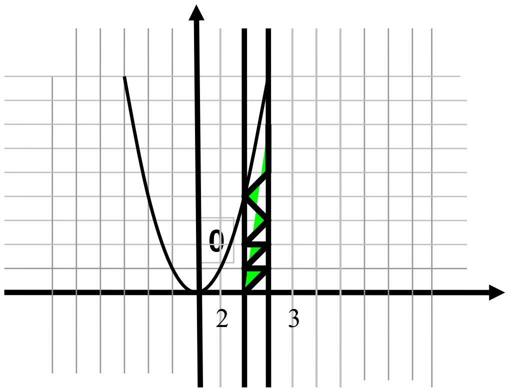


4. Находим площадь: $S=S_1+S_2$

$$S_1 = \int\limits_{-4}^{2} (0{,}5x + 2)dx\,, \quad S_2 = \int\limits_{2}^{5} (-x + 5)dx$$

$$S = S_1 + S_2 = \int_{-4}^{2}(0{,}5x+2)dx + \int_{2}^{5}(-x+5)dx = (0{,}25x^2+2x)\Big|_{-4}^{2} + (-0{,}5x^2+5x)\Big|_{2}^{5} =$$
$$= 9 + 4{,}5 = 13{,}5\ (кв.ед.)$$

Задача 3:
Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=x^2$, $y=0$, $x=2$ и $x=3$.

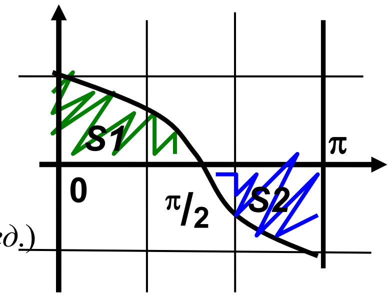


Решение:

1. Выполним построение фигуры в координатной плоскости:
2. Находим площадь:

$$S = \int_{2}^{3} x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{2}^{3} = 6\frac{1}{3}\ (кв.ед.)$$

Задача 4:
Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=\cos x$, $y=0$, $x=0$ и $x=\pi$.



Решение:

1. Выполним построение фигуры в координатной плоскости:
2. Находим площадь: $S=S_1+S_2$,

$S_1=S_2$ т.к. cosx –четная функция, то : $S=2S_1$

$$S = 2\cdot S_1 = 2\int_{0}^{\pi/2}\cos x dx = 2\cdot \sin x\Big|_{0}^{\pi/2} = 2\cdot(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0) = 2\cdot(1-0) = 2\ (кв.ед.)$$

Задача 5:
Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=x^2$ и $y=2x$.

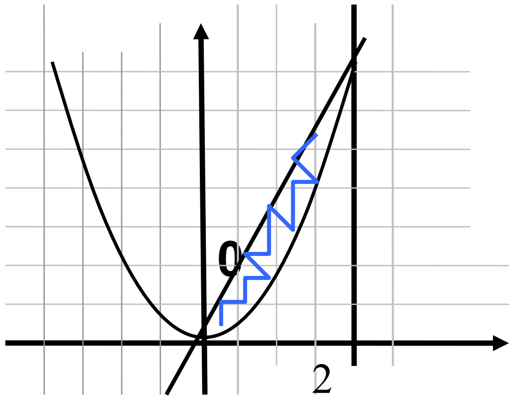
Решение:

1. Найдем точку пересечения:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x \end{cases} \Rightarrow x^2 - 2x = 0$$

$$x(x-2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 2$$

$$y_1 = 0,\ y_2 = 4$$

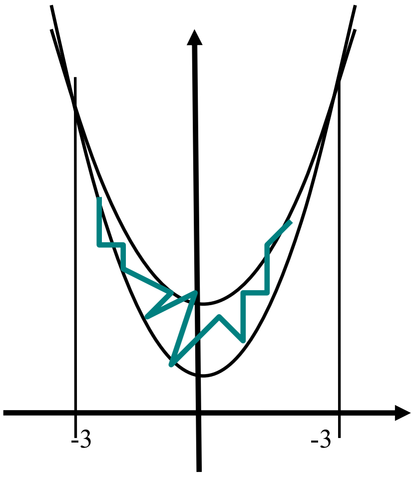


2. Выполним построение фигуры в координатной плоскости:
3. Находим площадь по формуле б)

$$S = \int_{0}^{2}(2x - x^2)dx = (2\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3})\Big|_{0}^{2} = (2^2 - \frac{2^3}{3}) - (0^2 - \frac{0^3}{3})$$

$$= 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}\ (кв.ед.)$$

Задача 6:
Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $7x^2-9y+9=0$ и $5x^2-9y+27=0$.



Решение:

1. Выразим функцию y:

$$y_1 = (7/9)x^2 + 1,$$

$$y_2 = (5/9)x^2 + 3$$

2. Найдем точку пересечения:

$$\begin{cases} y = (7/9)x^2 + 1, \\ y = (5/9)x^2 + 3 \end{cases} \Rightarrow x_1 = -3,\ x_2 = 3$$

$$y_1 = 8,\ y_2 = 8$$

3. Выполним построение фигуры в координатной плоскости:
4. Находим площадь по формуле б)

$$S = \int_{-3}^{3}\left((\frac{5}{9}x^2 + 3) - (\frac{7}{9}x^2 + 1) \right)dx = \int_{-3}^{3}\left(2 - \frac{2}{9}x^2 \right)dx = 2\cdot\left(x - \frac{2x^3}{27} \right)\Bigg|_{-3}^{3} = 8\,(кв.ед.)$$

Ход выполнения:

Вычислите площади фигур, ограниченные линиями:

1. x-y+2=0, y=0, x=-1, x=2
2. 2x-3y+6=0, y=0,x=3
3. $y=x^3$, y=0, x=-2, x=2
4. y=cosx, y=0, x=0, $x=\pi/3$
5. x-y+3=0, y=-x, y=0

Форма отчета: задачи

Практическое занятие № 7

Тема: Решение задач по вычислению определенного и неопределенного интегралов

Цель: отработать навыки вычисления производной

Оборудование: тетрадь, ручка

Методические указания:

Первый замечательный предел.

Предел отношения ***sin*** бесконечно малой величины к самой этой величины к самой этой величине равен 1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x} = 1$$

Например:

1. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{3x} = \frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{3}\cdot 1 = \frac{1}{3}$

2. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x} = 5\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x} = 5\cdot 1 = 5$

3. $\lim_{x\to 0}\frac{tg\,3x}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{x}\cdot\frac{1}{\cos 3x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{3\sin 3x}{3x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{cos\,3x} =$
$= 3\cdot 1\cdot 1 = 3$

4. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 5x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 3x}{x}}{\frac{\sin 5x}{x}} = \frac{\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}}{\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}} = \frac{3}{5}$

Свойства:

1. $\underset{x\to 0}{\ell im}\ \dfrac{\sin ax}{bx}=\dfrac{a}{b}$
2. $\underset{x\to 0}{\ell im}\ \dfrac{tgax}{bx}=\dfrac{a}{b}$
3. $\underset{x\to 0}{\ell im}\ \dfrac{\sin ax}{\sin bx}=\dfrac{a}{b}$

Второй замечательный предел.

$$\underset{x\to 0}{\ell im}\ (1+x)^{\frac{1}{x}}=e \qquad\qquad \underset{x\to \infty}{\ell im}\ \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$

Например:

1. $\underset{x\to \infty}{\ell im}\ \left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{x}=\left(\underset{x\to \infty}{\ell im}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}}\right)^{3}=e^{3}$

2. $\underset{x\to \infty}{\ell im}\ \left(1+\dfrac{1}{5x}\right)^{x}=\left(\underset{x\to \infty}{\ell im}\left(1+\dfrac{1}{5x}\right)^{5x}\right)^{\frac{1}{5}}=e^{\frac{1}{5}}$

3. $\underset{x\to 0}{\ell im}\ (1+4x)^{\frac{3}{5x}}=\left(\underset{x\to 0}{\ell im}(1+4x)^{\frac{1}{4x}}\right)^{\frac{3\cdot 4}{5}}=e^{\frac{12}{5}}$

4. $\underset{x\to \infty}{\ell im}\ \left(\dfrac{1+x}{x}\right)^{\frac{x}{2}}=\left(\underset{x\to \infty}{\ell im}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}\right)^{\frac{1}{2}}=e^{\frac{1}{2}}$

Ход выполнения:

1. $\underset{x\to 0}{\ell im}\ \dfrac{\sin 2x}{3x}$
2. $\underset{x\to 0}{\ell im}\ \dfrac{\sin 5x}{3x}$
3. $\underset{x\to 0}{\ell im}\ \dfrac{\sin 4x}{\sin 7x}$
4. $\underset{x\to 0}{\ell im}\ \dfrac{\sin 6x}{tg 3x}$
5. $\underset{x\to \infty}{\ell im}\ \left(1+\dfrac{5}{3x}\right)^{2x}$
6. $\underset{x\to \infty}{\ell im}\ \left(1+\dfrac{2}{3x}\right)^{x}$

Форма отчета: задачи

Практическое занятие № 8

Тема: Решение задач по вычислению частных производных

Цель: закрепить усвоение теоретического материала по данной теме через решение упражнений;

- закрепить умения находить частные производные функции первого и второго порядков;
- закрепить умения применять частные производные для решения дифференциальных уравнений.

Оборудование: тетрадь, ручка

Методические указания:

Теоретический материал

Частные производные

При вычислении частных производных необходимо помнить следующее:

1) Все правила вычисления производных и все табличные производные функций одной переменной сохраняют силу.

2) При нахождении частной производной функции $z = f(x, y)$ по x переменную y считают постоянной. Это приводит к тому, что перед нами возникает функция одной переменной x, от которой надо взять обычную производную. Поэтому, в частности, любые выражения, зависящие только от y, будут тоже постоянными и производная по x от них равна 0: $(f(y))'_x = 0$.

В произведении любой множитель, зависящий только от y, выполняет роль множителя-константы: $(f(y)\cdot g(x))'_x = f(y)\cdot g'(x)$.

3) Аналогичным образом находят частную производную функции $z = f(x, y)$ по y.

Частными производными второго порядка называют частные производные, взятые от частных производных первого порядка:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x, y), \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x, y),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x, y), \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x, y).$$

Частные производные $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ и $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ называются *смешанными*. Если они непрерывны, то их значения не зависят от порядка дифференцирования (они равны).

Ход выполнения:

Вариант 1

1. **Найти dz:**

$$а)\ z = e^{xy}; \qquad б)\ z = \frac{xy}{x+y}.$$

2. **Найти частные производные второго порядка:**

$a)\ z = x^3y^2 - 2xy^3;\qquad б)z = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}.$

3. Найти d²z:

$a)\ z = 2x^3 + y^2;\qquad б)z = \dfrac{y}{\sqrt[3]{x+xy}}.$

4. Проверьте, является ли функция $u=xy$ решением дифференциального уравнения в частных производных $u''_{xx}+u''_{xy}=1.$

5. Найти $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y},\ если\ \ z = arctg\dfrac{x+y}{1-xy}.$

Вариант 2

1. Найти dz:

$a)\ z = (x+2y)y^2;\qquad б)z = \cos(2x+e^y).$

2. Найти частные производные второго порядка:

$a)\ z = x^3 + 2xy^2 + 3y^3;\qquad б)z = x\ln y + \sqrt{\sin x}.$

3. Найти d²z:

$a)\ z = x\sqrt{y};\qquad б)z = x^{-3} + 2y.$

4. Проверьте, является ли функция $u=2x^2-2y^2$ решением дифференциального уравнения в частных производных $u''_{xx}+u''_{yy}=0.$

5. Найти $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2},\ если\ \ z = x\sin xy + y\cos xy.$

Вариант 3

1. Найти dz:

$a)\ z = \ln(x^2+y^2);\qquad б)z = \dfrac{x-y}{xy}.$

2. Найти частные производные второго порядка:

$a)\ z = x^3 - 2x^2y^2 + \sqrt{y};\qquad б)z = \left(\dfrac{x}{y}\right)^2$

3. Найти d²z:

$а)\ z = x^2 - 4y^3; \qquad б) z = tg\frac{x}{y}.$

4. Проверьте, является ли функция $u=x^2 y^2$ решением дифференциального уравнения в частных производных $u''_{xx} -2y^2=0.$

5. Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y},\ если\ \ z = \ln tg(x+y).$

Вариант 4

1. **Найти dz:**

$а)\ z = (xy) - \frac{y}{x}; \qquad б) z = e^x \cos y.$

2. **Найти частные производные второго порядка:**

$а)\ z = x^3 - 3yx^2 + 4x^3y^2; \qquad б) z = \ln(x + y^2).$

3. **Найти d^2z:**

$а)\ z = arctg\frac{x}{y}; \qquad б) z = x^3 - y.$

4. Проверьте, является ли функция $u=3x^2 y$ решением дифференциального уравнения в частных производных $u''_{xx} +u''_{yy}=6y.$

5. Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\ если\ \ z = \sin(x + \cos y).$

Форма отчета: зачет

Практическое занятие № 9

Тема: Решение задач по вычислению частных производных

Цель: закрепить умения применять частные производные для решения дифференциальных уравнений.

Оборудование: тетрадь, ручка

Методические указания:

Теоретический материал

Частные производные

При вычислении частных производных необходимо помнить следующее:

1) Все правила вычисления производных и все табличные производные функций одной переменной сохраняют силу.

2) При нахождении частной производной функции $z = f(x, y)$ по x переменную y считают постоянной. Это приводит к тому, что перед нами возникает функция одной переменной x, от которой надо взять обычную производную. Поэтому, в частности, любые выражения, зависящие только от y, будут тоже постоянными и производная по x от них равна 0: $(f(y))'_x = 0$.

В произведении любой множитель, зависящий только от y, выполняет роль множителя-константы: $(f(y)\cdot g(x))'_x = f(y)\cdot g'(x)$.

3) Аналогичным образом находят частную производную функции $z = f(x, y)$ по y.

Частными производными второго порядка называют частные производные, взятые от частных производных первого порядка:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x, y), \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x, y),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x, y), \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x, y).$$

Частные производные $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ называются *смешанными*. Если они непрерывны, то их значения не зависят от порядка дифференцирования (они равны).

Ход выполнения:

Вариант 1

6. Найти dz:

$$а)\ z = e^{xy}; \qquad б)\ z = \frac{xy}{x+y}.$$

7. Найти частные производные второго порядка:

$$а)\ z = x^3y^2 - 2xy^3; \qquad б)\ z = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

8. Найти d²z:

$$а)\ z = 2x^3 + y^2; \qquad б)\ z = \frac{y}{\sqrt[3]{x+xy}}.$$

9. Проверьте, является ли функция $u=xy$ решением дифференциального уравнения в частных производных $u''_{xx} + u''_{xy} = 1$.

10. Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, *если* $z = arctg\frac{x+y}{1-xy}$.

Вариант 2

6. Найти dz:

$a)\ z=(x+2y)y^2; \qquad б)z=\cos(2x+e^y).$

7. Найти частные производные второго порядка:

$a)\ z=x^3+2xy^2+3y^3; \qquad б)z=x\ln y+\sqrt{\sin x}.$

8. Найти d^2z:

$a)\ z=x\sqrt{y}; \qquad б)z=x^{-3}+2y.$

9. Проверьте, является ли функция $u=2x^2-2y^2$ решением дифференциального уравнения в частных производных $u''_{xx}+u''_{yy}=0$.

10. Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, *если* $z=x\sin xy+y\cos xy.$

Вариант 3

6. Найти dz:

$a)\ z=\ln(x^2+y^2); \qquad б)z=\frac{x-y}{xy}.$

7. Найти частные производные второго порядка:

$a)\ z=x^3-2x^2y^2+\sqrt{y}; \qquad б)z=\left(\frac{x}{y}\right)^2$

8. Найти d^2z:

$a)\ z=x^2-4y^3; \qquad б)z=tg\frac{x}{y}.$

9. Проверьте, является ли функция $u=x^2 y^2$ решением дифференциального уравнения в частных производных $u''_{xx}-2y^2=0$.

10. Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, *если* $z=\ln tg(x+y).$

Вариант 4

6. Найти dz:

$a)\ z = (xy) - \frac{y}{x};$ $\qquad б) z = e^x \cos y.$

7. Найти частные производные второго порядка:

$a)\ z = x^3 - 3yx^2 + 4x^3y^2;$ $\qquad б) z = \ln(x + y^2).$

8. Найти d^2z:

$a)\ z = arctg\frac{x}{y};$ $\qquad б) z = x^3 - y.$

9. Проверьте, является ли функция $u=3x^2y$ решением дифференциального уравнения в частных производных $u''_{xx} + u''_{yy} = 6y$.

10. Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, *если* $z = \sin(x + \cos y)$.

Форма отчета: задачи

Практическое занятие № 10

Тема: Решение задач по нахождению производных высших порядков

Цель: закрепить усвоение теоретического материала по данной теме через решение упражнений;

- закрепить умения находить производные функции различных порядков;
- закрепить умения применять производные для решения дифференциальных уравнений.

Оборудование: тетрадь, ручка

Методические указания:

Теоретический материал и методические указания к выполнению заданий

Производные высших порядков

Если производная $f'(x)$ функции $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и имеет в этой точке производную, то эта производная от $f'(x)$ называется **второй производной** (или **производной второго порядка**) функции $y = f(x)$ в точке x_0 и обозначается одним из следующих символов:

$$f''(x_0),\quad f^{(2)}(x_0),\quad y''(x_0),\quad y^{(2)}(x_0),\quad \frac{d^2y}{dx^2}(x_0),\quad \frac{d^2f}{dx^2}(x_0)\quad y''_{xx}.$$

Третья производная определяется как производная от второй производной и т. д. Если уже введено понятие $(n-1)$-й производной и если $(n-1)$-я производная имеет производную в точке x_0, то указанная производная **называется n-й производной** (или **производной n-го порядка**) и обозначается

$$f^{(n)}(x_0),\ y^n(x_0) \text{ или } \frac{d^n f}{dx^n}(x_0),\ \frac{d^n y}{dx^n}(x_0).$$

Таким образом, производные высших порядков определяются индуктивно по формуле:

$$y^{(n)}(x)=\left[y^{(n-1)}(x)\right]'.$$

Функция, имеющая n-ю производную в точке x_0, называется n раз дифференцируемой в этой точке.

__**Пример.**__ Найти $\dfrac{d^2 y}{dx^2}$ функции $y=\arcsin e^x$.

__**Решение.**__ $y'=\dfrac{dy}{dx}=\left(\arcsin e^x\right)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-e^{2x}}}\cdot\left(e^x\right)'=\dfrac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$.

$$\frac{d^2 y}{dx^2}=\frac{dy'}{dx}=\left(\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\right)'=\frac{\left(e^x\right)'\sqrt{1-e^{2x}}-e^x\left(\sqrt{1-e^{2x}}\right)'}{1-e^{2x}}=\frac{e^x\sqrt{1-e^{2x}}+e^x\cdot\dfrac{e^{2x}}{\sqrt{1-e^{2x}}}}{1-e^{2x}}=\frac{e^x}{\left(1-e^{2x}\right)^2}$$

Ход выполнения:

Вариант 1

1. Найти производные функций указанных порядков:

$y=x^3-4x^2+5x-1,\quad y'''-?$

$y=\sin 2x,\quad y'''-?$

$y=\cos^2\dfrac{x}{4},\ y''-?$

$y=\dfrac{x+1}{2x+3},\ y''-?$

2. Найти производную функции второго порядка в точке x_0: $y=e^{-x^2}$, $x_0=0$.

3. Показать, что функция $y=3tg(2x-1)$ удовлетворяет уравнению $y''=2yy'$.

Вариант 2

1. Найти производные функций указанных порядков:

$y=x^4-2x^3-6x+5,\quad y'''-?$

$y=3\cdot 2^x,\quad y'''-?$

$y=\sin^2 5x,\ y''-?$

$y=\dfrac{2x-1}{2x+3},\ y''-?$

2. Найти производную функции второго порядка в точке x_0: $y=x+\sin 2x$, $x_0=0$.

3. Показать, что функция $y=2e^{3x}-e^{-3x}$ удовлетворяет уравнению $yy'''=y'y''$.

Вариант 3

1. Найти производные функций указанных порядков:

$y=3x^3-8x^2-x+3, \quad y'''-?$

$y=\cos\frac{x}{3}, \quad y'''-?$

$y=tg2x, \quad y''-?$

$y=\frac{6x^2}{3-x}, \quad y''-?$

2. Найти производную функции второго порядка в точке x_0: $y=x\ln 3x$, $x_0=1$.

3. Показать, что функция $y=\ln^2 x$ удовлетворяет уравнению $y''=\frac{2}{x^2}(1-\sqrt{y})$.

Вариант 4

1. Найти производные функций указанных порядков:

$y=6x^4-3x^2+5x-2, \quad y'''-?$

$y=e^{-x}, \quad y'''-?$

$y=ctg\frac{x}{2}, \quad y''-?$

$y=\frac{x^2}{1-4x}, \quad y''-?$

2. Найти производную функции второго порядка в точке x_0: $y=x^2e^{-x}$, $x_0=0$.

3. Показать, что функция $y=3^{-2x}+3^{2x}$ удовлетворяет уравнению $y''=4\ln^2 3\, y$.

Форма отчета: задачи

Практическое занятие № 11

Тема: Решение задач по интегральному исчислению функций нескольких действительных переменных

Цель: отработать навыки интегрального исчисления

Оборудование: тетрадь, ручка

Методические указания:

Основные понятия.

1 Пусть *f(x)* задана на бесконечном промежутке *[a; ∞)* и для всякого *A≥a* существует интеграл $\int_a^A f(x)dx$ Предел $\lim_{A\to\infty}\int_a^A f(x)dx$ называется несобственным интегралом первого рода (интегралом по неограниченному промежутку) и обозначается $\int_a^\infty f(x)dx$

2 Если $\lim_{A\to\infty}\int_a^A f(x)dx$ существует и конечен, то несобственный интеграл первого рода называется сходящимся, если же он не существует или равен бесконечности, то несобственный интеграл первого рода называется расходящимся.

3 Пусть *f(x)* задана на полуинтервале *[a,b)* и $\lim_{x\to b} f(x)=\infty$ Пусть далее для всякого $0<\delta<b-a$ существует интеграл $\int_a^{b-\delta} f(x)dx$ Предел $\lim_{\delta\to 0}\int_a^{b-\delta} f(x)dx$ называется несобственным интегралом второго рода (интегралом от неограниченной функции) и обозначается $\int_a^b f(x)dx$

4 Если $\lim_{\delta\to 0}\int_a^{b-\delta} f(x)dx$ существует и конечен, то несобственный интеграл второго рода называется сходящимся, если же он не существует или равен бесконечности, то несобственный интеграл второго рода называется расходящимся.

5 Двойным интегралом от функции $f(x,y)$ по области D называется предел интегральных сумм $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i$, где S_i - разбиение области D, ΔS_i - площадь i - го разбиения, $M_i \in S_i$, $i \in \overline{1,n}$.

6 Свойства двойных интегралов:

– $\iint\limits_D C\cdot f(x,y)dxdy = C\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, $C = const$.

– $\iint\limits_D [f(x,y)+g(x,y)]dxdy = \iint\limits_D f(x,y)dxdy + \iint\limits_D g(x,y)dxdy$.

– $\iint\limits_{D=D_1\cup D_2} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy$

7 Сведение двойного интеграла к повторному

$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$, где $D = \{a \le x \le b,\quad \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\}$

$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dy \int\limits_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)} f(x,y)dx$, где $D = \{a \le y \le b,\quad \phi_1(y) \le x \le \phi_2(y)\}$

Задание

1 Вычислить несобственный интеграл первого рода или установить его расходимость.

2 Вычислить несобственный интеграл второго рода или установить его расходимость.

3 Вычислить двойной интеграл по прямоугольной области.

4 Вычислить двойной интеграл по криволинейной области.

Примеры выполнения:

Задание 1

Исходные данные:

$$\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^{10}}$$

Решение:

По обобщенной формуле Ньютона-Лейбница

$$\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^{10}} = \lim_{a\to\infty}\int\limits_1^a x^{-10}dx = \lim_{a\to\infty}\frac{x^{-9}}{-9}\Bigg|_1^\infty = \lim_{a\to\infty}\left(-\frac{1}{9x^9}\Bigg|_1^\infty\right) = 0 + \frac{1}{9} = \frac{1}{9}$$

Следовательно, несобственный интеграл первого рода сходится.

Ход выполнения:

Задание 1

1 $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2}$	2 $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x}$	3 $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^5}$	4 $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x}$	5 $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$

Форма отчета: задачи

Практическое занятие № 12

Тема: Решение задач по интегральному исчислению функций нескольких действительных переменных

Цель: отработать навыки интегрального исчисления

Оборудование: тетрадь, ручка

Методические указания:

Задание 2

Исходные данные:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[7]{x}}$$

Решение:

Точка $x = 0$ особая. По обобщенной формуле Ньютона-Лейбница

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[7]{x}} = \lim_{a \to 0} \int_a^1 x^{-\frac{1}{7}} dx = \lim_{a \to 0} \frac{x^{\frac{6}{7}}}{\frac{6}{7}} \Bigg|_a^1 = \frac{7}{6} \lim_{a \to 0} x^{\frac{6}{7}} \Big|_a^1 = \frac{7}{6}\left(1^{\frac{6}{7}} - 0\right) = \frac{7}{6}$$

Следовательно, несобственный интеграл второго рода сходится.

Задание 3

Исходные данные:

$\iint\limits_D xydxdy$, где $D: 3 \le x \le 5, \quad 0 \le y \le 1$

Решение:

$$\iint\limits_D xydxdy = \int_3^5 dx \int_0^1 xydy = \int_3^5 xdx \frac{y^2}{2}\Bigg|_0^1 = \int_3^5 \frac{x}{2}(1-0)dx = \int_3^5 \frac{x}{2}dx = \frac{x^2}{2 \cdot 2}\Bigg|_3^5 =$$

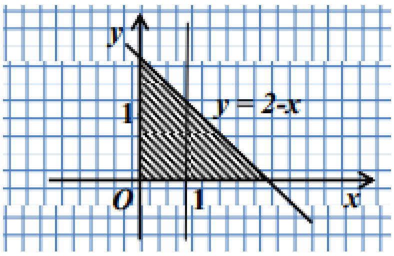
$$= \frac{25}{4} - \frac{9}{4} = \frac{16}{4} = 4$$

Задание 4

Исходные данные:

1 $\iint\limits_D (4x + y)dxdy$, где $D: x + y = 2, \quad x = 0 \quad y = 0$

Решение:



Построим область D: $y = 2 - x$; $y = 0$; $x = 0$

Область ограничена слева и справа прямыми $x = 0$; $x = 2$, сверху и снизу область ограничивают линии $y = 2 - x$ и $y = 0$.

Получим

$D=\{0\le x\le 2,\quad 0\le y\le 2-x\}$, тогда

$$\iint_D (4x+y)dxdy=\int_0^2 dx\int_0^{2-x}(4x+y)dy=\int_0^2\left(4xy+\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^{2-x}dx=$$

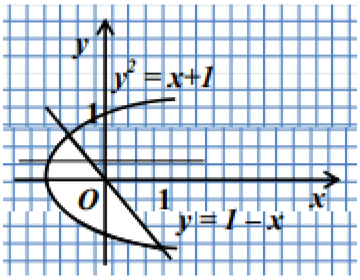
$$=\int_0^2\left(4x(2-x)+\frac{(2-x)^2}{2}\right)\Bigg|_0^{2-x}dx=\int_0^2\left(8x-4x^2+\frac{4-4x+x^2}{2}\right)dx=$$

$$\int_0^2\left(8x-4x^2+\frac{4-4x+x^2}{2}\right)dx=\int_0^2\left(8x-4x^2+2-2x+\frac{x^2}{2}\right)dx=$$

$$=\int_0^2\left(6x+2-\frac{7x^2}{2}\right)dx=\left(3x^2+2x-\frac{7x^3}{6}\right)\Bigg|_0^2=12+4-\frac{28}{3}=\frac{4}{3}$$

2 $\iint_D dxdy;D=\{(x;y)\,|\,y^2=x+1;x+y=1\}$

Решение:



Построим область D:

$$D=\{(x;y)\,|\,y^2=x+1;x+y=1\}$$

По графику можно увидеть, что ордината области расположена между точками пересечения графиков функций, а абсцисса области между линиями $y^2=x+1;x+y=1$

Найдем точки пересечения графиков функций:

$y^2=x+1\Rightarrow x=y^2-1;$

$x+y=1\Rightarrow x=1-y;$

$y^2-1=1-y;\quad y^2+y-2=0;\quad D=1+8=9;\quad y_1=\frac{-1+3}{2}=1;\quad y_2=\frac{-1-3}{2}=-2$

$D=\{(x;y)\,|\,-2\le y\le 1;\quad y^2-1\le x\le 1-y\}$, тогда

$$\iint_D dxdy=\int_{-2}^1 dy\int_{y^2-1}^{1-y}dx=\int_{-2}^1 dy\,x\Big|_{y^2-1}^{1-y}=\int_{-2}^1(1-y-y^2+1)dy=\int_{-2}^1(2-y-y^2)dy=$$

$$=\left(2y-\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^1=2-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+4+2-\frac{8}{3}=8-3-0{,}5=4{,}5$$

Ход выполнения:

Задание 2

1 $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}}$	2 $\int_{-2}^2\frac{dx}{x^3}$	3 $\int_0^3\frac{dx}{(x-2)^2}$	4 $\int_{-1}^0\frac{dx}{\sqrt{(x+1)^3}}$	5 $\int_0^{\frac{1}{e}}\frac{dx}{x\ln^4 x}$

Задание 3

1 $\iint\limits_D 3xy^2dxdy$ $D=\{(x;y)\,\vert\,3\le x\le 6;0\le y\le 2\}$	2 $\iint\limits_D 9x^2ydxdy$ $D=\{(x;y)\,\vert\,3\le x\le 6;0\le y\le 2\}$

Задание 4

1 $\iint\limits_D xdxdy$ $D=\{(x;y)\,\vert\,y=x^3;x+y=2;x=0\}$	2 $\iint\limits_D 9x^2ydxdy$ $D=\{(x;y)\,\vert\,xy=6;x+y-7=0\}$

Форма отчета: задачи

Практическое занятие № 13

Тема: Решение задач по теории рядов

Цель: отработать навыки решения задач по теории рядов

Оборудование: тетрадь, ручка

Методические указания:

I. Числовой ряд

1.1. Основные понятия числового ряда.

Числовым рядом называется сумма вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots, \quad (1.1)$$

где $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$, называемые членами ряда, образуют бесконечную последовательность; член u_n называется общим членом ряда.

Суммы

$$S_1 = u_1,$$
$$S_2 = u_1 + u_2,$$
$$S_3 = u_1 + u_2 + u_3,$$

....

$$S_3 = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n,$$

составленные из первых членов ряда (1.1), называются частичными суммами этого ряда.

Каждому ряду можно сопоставить последовательность частичных сумм $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n, \ldots$.

Если при бесконечном возрастании номера *n* частичная сумма ряда S_n стремится к пределу S, то ряд называется сходящимся, а число S - суммой сходящегося ряда, т.е.

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ и $\lim\limits_{n\to\infty}(u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n) = S$.

Эта запись равносильна записи

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots = S.$$

Если частичная сумма S_n ряда (1.1) при неограниченном возрастании *n* не имеет конечного предела (стремится к $+\infty$ или $-\infty$), то такой ряд называется ***расходящимся***.

Если ряд ***сходящийся***, то значение S_n при достаточно большом ***n*** является приближенным выражением суммы ряда *S*.

Разность $r_n = S - S_n$ называется остатком ряда. Если ряд сходится, то его остаток стремится к нулю, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$, и наоборот, если остаток стремится к нулю, то ряд сходится.

Ход выполнения:

Упражнения.

Записать ряд по его заданному общему члену:

$$u_n = \frac{n+1}{2^n};$$

$$u_n = \frac{n+2}{2n-1};$$

$$u_n = \frac{x^n}{n!}.$$

Форма отчета: задачи

Практическое занятие № 14

Тема: Решение задач по теории рядов

Цель: отработать навыки решения задач по теории рядов

Оборудование: тетрадь, ручка

Методические указания:

II. Знакопеременный ряд

2.1 Понятие знакопеременного ряда.

Числовой ряд

$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$

называется ***знакопеременным***, если среди его членов имеются как положительные, так и отрицательные числа.

Числовой ряд называется ***знакочередующимся***, если любые два стоящие рядом члена имеют противоположные знаки.

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^{n+1} u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n,$$

где $u_n > 0$ для всех $n \in N$ (т.е. ряд, положительные и отрицательные члены которого следуют друг за другом поочередно). Например,

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots;$$

$$\frac{1}{1} - \frac{2}{3} + \frac{3}{5} - \frac{4}{7} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{n}{2n-1} + \ldots;$$

$$\frac{1}{2} - \frac{2}{4} + \frac{3}{8} - \frac{4}{16} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{n}{2^n} + \ldots.$$

Для знакочередующихся рядов имеет место достаточный признак сходимости (установленный в 1714г. Лейбницем в письме к И.Бернулли).

2.2 Признак Лейбница. Абсолютная и условная сходимость ряда.

Теорема (Признак Лейбница).

Знакочередующийся ряд сходится, если:

Последовательность абсолютных величин членов ряда монотонно убывает, т.е. $u_1 > u_2 > u_3 > \ldots > u_n > \ldots$***;***

Общий член ряда стремится к нулю: $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = 0$.

При этом сумма S ряда удовлетворяет неравенствам

Для знакопеременных рядов имеет место следующий общий достаточный признак сходимости.

Теорема. Пусть дан знакопеременный ряд

$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$.

Если сходится ряд

$|u_1| + |u_2| + |u_3| + \ldots + |u_n| + \ldots$,

составленный из модулей членов данного ряда, то сходится и сам знакопеременный ряд.

Признак сходимости Лейбница для знакочередующихся рядов служит достаточным признаком сходимости знакочередующихся рядов.

Знакопеременный ряд называется ***абсолютно сходящимся***, если сходится ряд, составленный из абсолютных величин его членов, т.е. всякий абсолютно сходящийся ряд является сходящимся.

Если знакопеременный ряд сходится, а составленный из абсолютных величин его членов ряд расходится, то данный ряд называется ***условно*** (неабсолютно) ***сходящимся.***

Ход выполнения:

Пример. Вычислить приблизительно сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n^n}$.

Исследовать на сходимость (абсолютную или условную) знакочередующийся ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n} + \ldots;$$

Форма отчета:

Практическое занятие № 15

Тема: Решение задач по теории рядов

Цель: отработать навыки решения задач по теории рядов

Оборудование: тетрадь, ручка

Методические указания:

III. Функциональный ряд

3.1. Понятие функционального ряда.

Ряд, членами которого являются функции от x, называется ***функциональным***:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x_1) + u_2(x_2) + \ldots + u_n(x_n) + \ldots .$$

Придавая x определенное значение , получим числовой ряд

,

который может быть как сходящимся, так и расходящимся.

Если полученный числовой ряд сходится, то точка называется ***точкой сходимости*** функционального ряда; если же ряд расходится – ***точкой расходимости*** функционального ряда.

Совокупность числовых значений аргумента x, при которых функциональный ряд сходится, называется его ***областью сходимости***.

В области сходимости функционального ряда его сумма является некоторой функцией от $x: S = S(x)$.

Определяется она в области сходимости равенством

$S(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)$, где

$S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x)$ - частичная сумма ряда.

3.2. Степенные ряды.

Степенным рядом называется ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots,$$

где числа $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ называются ***коэффициентами ряда***, а член $a_n x^n$ - общим членом ряда.

Областью сходимости степенного ряда называется множество всех значений x, при которых данный ряд сходится.

Число называется ***радиусом сходимости*** степенного ряда, если при $|x| < R$ ряд сходится и притом абсолютно, а при $|x| > R$ ряд расходится.

Радиус сходимости найдем, используя признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = |x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 \text{ (} x \text{ не зависит от } n\text{)},$$

$$|x| < \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|,$$

т.е. если степенной ряд сходится при любых x, удовлетворяющих данному условию и расходится при $|x| > \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$.

Отсюда следует, что если существует предел

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \quad (a_n \neq 0, \quad n = 1, 2, 3, \ldots),$$

то радиус сходимости ряда R равен этому пределу и степенной ряд сходится при $|x| < R$, т.е. в промежутке $-R < x < R$, который называется ***промежутком (интервалом) сходимости.***

Если , то степенной ряд сходится в единственной точке .

На концах промежутка ряд может сходиться (абсолютно или условно), но может и расходиться.

Сходимость степенного ряда при и $x = R$ исследуется с помощью какого-либо из признаков сходимости.

Ход выполнения:

.

Найти область сходимости ряда:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!};$$

Форма отчета: задачи

Практическое занятие № 16

Тема: Решение задач по ОДУ

Цель: закрепить усвоение теоретического материала по данной теме через решение упражнений; закрепить умения решать дифференциальные уравнения первого порядка.

Оборудование: тетрадь, ручка

Методические указания:

Теоретический материал

Обыкновенные дифференциальные уравнения

Дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение, в которое, кроме независимой переменной x и искомой функции y, входит либо производная y':

$$F(x, y, y') = 0,$$

либо дифференциалы dx и dy:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0.$$

Удобнее рассматривать уравнение, разрешенное относительно y':

$$y' = f(x, y). \qquad (1)$$

Задачей Коши для дифференциального уравнения первого порядка называют задачу, состоящую в отыскании решения $y = \varphi(x)$ уравнения (1), удовлетворяющего заданному начальному условию $y(x_0) = y_0$.

Решение задачи Коши называют *частным решением* дифференциального уравнения.

Уравнения с разделяющимися переменными

Уравнение вида

$$y' = f(x) \cdot g(y) \qquad (2)$$

называется уравнением с разделяющимися переменными.

Алгоритм решения дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными

1. Перепишем уравнение (2) в виде $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$.

2. Разделим переменные, т. е. в правую часть уравнения «перенесем» все выражения, содержащие x, а в левую часть – содержащие y.

3. В результате получим уравнение $\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$,

где коэффициент при dx – функция только от x, при dy – функция только от y).

4.Интегрируя обе части этого уравнения:

$$\int \frac{dy}{g(y)dx} = \int f(x)dx + C\cdot$$

5.Получим его общее решение:

Пример. Решить задачу Коши: $3y' = y^{-2}e^x$, $y(2) = 3$.

Решение. Запишем уравнение в виде $3\frac{dy}{dx} = \frac{e^x}{y^2}$. Умножив обе части уравнения на y^2dx, получим $$3\frac{dy}{dx}y^2dx = \frac{e^x}{y^2}y^2dx, \quad 3y^2dy = e^x dx.$$

Интегрируем: $$\int 3y^2dy = \int e^x dx + C, \quad y^3 = e^x + C.$$

Общее решение уравнения: $y = \sqrt[3]{e^x + C}$.

Подставим в общее решение начальные значения $y(2) = 3$, получим значение C:

$$1 = \sqrt[3]{e^0 + C}, \quad 1 = 1 + C, \quad C = 0.$$

Тогда частное решение уравнения: $y = \sqrt[3]{e^x} = e^{\frac{x}{3}}$.

Однородные дифференциальные уравнения

Дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ называется ***однородным***, если $f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)$ при любых x, y, $\lambda \neq 0$.

Подстановка

$$y = ux, \quad y' = u'x + u,$$

где $u = u(x)$ – новая неизвестная функция, приводит однородное уравнение к уравнению с разделяющимися переменными.

<u>Пример.</u> Найти общее решение уравнения $x^2y' = y^2 + xy + x^2$.

Решение. Приведем уравнение к виду $y' = f(x, y)$, для этого разделим обе части уравнения на x^2:

$$y' = \frac{y^2}{x^2} + \frac{y}{x} + 1,$$

получим, что $f(x, y) = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{y}{x} + 1\cdot$

Покажем, что уравнение однородное. Очевидно,

$$f(\lambda x, \lambda y) = \left(\frac{\lambda y}{\lambda x}\right)^2 + \frac{\lambda y}{\lambda x} + 1 = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{y}{x} + 1 = f(x, y)\cdot$$

Следовательно, уравнение однородное и для сведения его решения к решению уравнения с разделяющимися переменными надо сделать подстановку (1), после этого уравнение примет вид:

$$u'x + u = u^2 + u + 1.$$

После приведения подобных членов получим

$$u'x = u^2 + 1, \quad u' = \frac{u^2 + 1}{x}.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными: $\frac{du}{dx}=\frac{u^2+1}{x}$. Разделим переменные, умножая обе части на $\frac{dx}{u^2+1}$: $\frac{du}{u^2+1}=\frac{dx}{x}$.

Интегрируя, получим

$$arctgu=\ln|x|+C_1.$$

Произвольную постоянную C_1 удобно записать в виде: $C_1=\ln|C|$. Тогда последнее уравнение примет вид:

$$arctgu=\ln|x|+\ln|C|,\ \ arctgu=\ln|Cx|,\ \ u=tg\ln|Cx|.$$

Сделаем обратную замену: $\frac{y}{x}=tg\ln|Cx|$, $y=xtg\ln|Cx|$.

Линейные неоднородные уравнения первого порядка

Уравнение вида

$$y'+P(x)y=Q(x)$$

называется линейным.

Для нахождения его решения искомую функцию y представляют в виде

$$y=u(x)v(x),$$

тогда $y'=u'v+uv'$.

Подставим y и y' в уравнение (2):

$$u'v+uv'+P(x)uv=Q(x),$$

после группировки имеем

$$u'v+u(v'+P(x)v)=Q(x).$$

Найдем такую функцию v, чтобы выражение в скобках обратилось в нуль, т. е.

$$v'+P(x)v=0.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Пусть $v=v_0(x)$ − его решение (при вычислении $v_0(x)$ не надо вводить произвольную постоянную). Тогда в силу (2.5) и (2.6) функция u должна удовлетворять уравнению

$$u'v_0(x)=Q(x).$$

Это уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{du}{dx}v_0(x)=Q(x),\ du=\frac{Q(x)}{v_0(x)}dx,\ u(x)=\int\frac{Q(x)}{v_0(x)}dx+C.$$

Следовательно, общим решением уравнения (2) будет

$$y=\left(\int\frac{Q(x)}{v_0(x)}dx+C\right)v_0(x).$$

Пример. Найти общее решение уравнения $y'-y=e^{2x}$.

Решение. Дано линейное уравнение, в котором $P(x)=-1$, $Q(x)=e^{2x}$.

Подставляя в него $y=uv$, $y'=u'v+uv'$, получим

$$u'v+uv'-uv=e^{2x},\qquad u'v+u(v'-v)=e^{2x}.$$

Приравнивая нулю выражение, стоящее в скобках, получим:

$$v' - v = 0, \text{ т. е. } \frac{dv}{dx} = v,\ \frac{dv}{v} = dx,\ \int \frac{dv}{v} = \int dx,\ \ln v = x,\ v = e^x.$$

Если $v = e^x$, то то функция u должна удовлетворять уравнению $u' \cdot e^x = e^{2x}$, т. е. $u' = e^x$, $\frac{du}{dx} = e^x$, $du = e^x dx$, $\int du = \int e^x dx + C$, $u = e^x + C$.

Следовательно, общим решением данного уравнения будет

$$y = \left(e^x + C\right)e^x = e^{2x} + Ce^x.$$

Ход выполнения:

Вариант 1

1. Решить дифференциальные уравнения:

а) $(1 - 3x)y' = 1 + y^2$;

б) $y' \cos x - y \sin x = 0$;

в) $y' - 4xy = 1$;

г) $\frac{yy'}{x} + e^y = 0$;

д) $xy' \sin(y/x) + x = y \sin(y/x)$;

е) $y' = 4 + (y/x) + (y/x)^2$.

2. Найдите решение дифференциального уравнения, удовлетворяющего начальному условию: $y' \cos x - 2y \sin x = 2,\ y(0) = 2$.

3. Найдите решение дифференциального уравнения, удовлетворяющего начальному условию: $(1 + x^3)y' - 3x^2 y = 1,\ y(1) = 0$.

Вариант 2

1. Решить дифференциальные уравнения:

а) $y' tgx - y = 0$;

б) $y(2 + x)y' = 3$;

в) $y' + \sin xy = e^{-\cos x} \sin 2x$;

г) $\left(1 + e^{2x}\right)y^2 dy = e^x dx$;

д) $xy + y^2 = \left(2x^2 + xy\right)y'$;

е) $y' = (y/x) + \cos(y/x)$.

2. Найдите решение дифференциального уравнения, удовлетворяющего начальному условию: $xy' + y = \frac{2x}{1 + x^2},\ y(1) = 0$.

3. Найдите решение дифференциального уравнения, удовлетворяющего начальному условию: $y' - 4xy = x,\ y(0) = \frac{3}{4}$.

Вариант 3

1. Решить дифференциальные уравнения:

а) $y' = e^{2x-y}$;

б) $\ln y dy + y(1+x^2)dx = 0$

в) $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$;

г) $\dfrac{dx}{x(y-1)} + \dfrac{dy}{y(x+2)} = 0$;

д) $xy' = xe^{y/x} + y$.

е) $xy' \ln(y/x) = x + y\ln(y/x)$.

2. Найдите решение дифференциального уравнения, удовлетворяющего начальному условию: $xy' + 2y = \dfrac{1}{x},\ y(1) = 3$.

3. Найдите решение дифференциального уравнения, удовлетворяющего начальному условию: $y'\sin x - y\cos x = 1,\ y(0) = 2$.

Вариант 4

1. Решить дифференциальные уравнения:

а) $ydy + e^x dx = 0$;

б) $x^2 dy + (2-3y)dx = 0$;

в) $y' + y = \dfrac{e^{-x}}{1+x^2}$;

г) $y\ln y + y'\sqrt{x+1} = 0$;

д) $xyy' = y^2 + 2x^2$;

е) $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$.

2. Найдите решение дифференциального уравнения, удовлетворяющего начальному условию: $xy' - 3y = x^4 e^x,\ y(1) = e$.

3. Найдите решение дифференциального уравнения, удовлетворяющего начальному условию: $y' - y\cos x = e^{\sin x}\sin 2x,\ y(\frac{\Pi}{2}) = 3$.

Форма отчета: зачет

Практическое занятие № 17

Тема: Решение задач по матрицам

Цель: Закрепить и проконтролировать умения выполнять операции над матрицами, находить значение матричного многочлена.

Оборудование: тетрадь, ручка

Методические указания:

Теоретический материал и методические указания к выполнению заданий

Операции над матрицами

1.Сложение и вычитание матриц определены только для матриц одинакового размера.

Суммой (разностью) матриц является матрица, элементами которой являются соответственно сумма (разность) элементов исходных матриц. $\mathbf{c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}}$.

2. Умножения (деления) матрицы любого размера на произвольное число сводится к умножению (делению) каждого элемента матрицы на это число.

3. Произведением матриц называется матрица, элементы которой могут быть вычислены по следующим формулам:

$$A \times B = C;$$

$$\boldsymbol{c}_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{a}_{ik} \cdot \boldsymbol{b}_{kj}$$

Пример:

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot(-1)+3\cdot(-2) & 2\cdot 2+3\cdot 3 \\ 5\cdot(-1)+7\cdot(-2) & 5\cdot 2+7\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 13 \\ -19 & 31 \end{pmatrix}$$

4. Транспонирование матрицы (обозначение: A^T) — операция, при которой матрица отражается относительно главной диагонали, то есть

$$a_{ij}^T = a_{ji}$$

Пример: Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ и число $\alpha = 2$. Найти $A^T B + \alpha C$.

Решение: $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $A^T B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1+2\cdot 3+1\cdot 2 \\ 0\cdot 1+4\cdot 3-4\cdot 2 \\ 3\cdot 1+1\cdot 3+2\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix}$;

$\alpha C = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$; $A^T B + \alpha C = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}$.

Пример: Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. Найти произведение матриц AB и BA.

Решение: $AB = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 2 & 1\cdot 4 & 1\cdot 1 \\ 4\cdot 2 & 4\cdot 4 & 4\cdot 1 \\ 3\cdot 2 & 3\cdot 4 & 3\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 8 & 16 & 4 \\ 6 & 12 & 3 \end{pmatrix}$.

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = (2\cdot1 + 4\cdot4 + 1\cdot3) = (2 + 16 + 3) = (21).$$

Ход выполнения:

Вариант 1

1. Вычислите матрицу $D=(A-B)^т*C$, где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 4 & -1 & 5 \\ 2 & -6 & -1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ -1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. Найти значение матричного многочлена f(A):

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 1, A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. Вычислите матрицу D=AB-2E, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix};$$ E – единичная матрица.

4. Найти произведение матриц:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Вариант 2

1. Вычислите матрицу D=A*(B+C), где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 0 & 5 & 7 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -4 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -5 \end{pmatrix}$$

2. Найти значение матричного многочлена f(A):

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 5, A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

3. Вычислите матрицу D=AB+4E, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix};$$ E – единичная матрица.

4. Найти произведение матриц:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

Вариант 3

1. Вычислите матрицу D=A*(B-C)^T, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 2 & 5 & -3 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

2. Найти значение матричного многочлена f(A):

$$f(x) = 2x^3 - x^2 + 3, A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Вычислите матрицу D=AB+3E, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{E – единичная матрица.}$$

4.Найти произведение матриц:

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Вариант 4

1. Вычислите матрицу D= BA+B-A^T:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -8 & -4 \\ 7 & 0 & -5 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

2. Найти значение матричного многочлена f(A):

$$f(x) = 4x^3 - 2x^2 + 3x - 2, A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Вычислите матрицу D=AB-5E, где

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}; \quad \text{E – единичная матрица.}$$

4.Найти произведение матриц:

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Форма отчета: задачи

Практическое занятие № 18

Тема: Решение задач по матрицам

Цель: закрепить усвоение теоретического материала по данной теме через решение упражнений;
закрепить умения вычислять определители матриц различных порядков

Оборудование: тетрадь, ручка

Методические указания:

Теоретические сведения и методические указания к выполнению заданий

Определителем второго порядка называется число равное разности произведений элементов главной и второй диагонали:

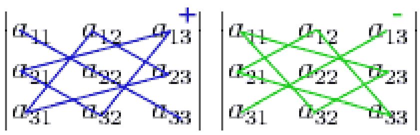
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

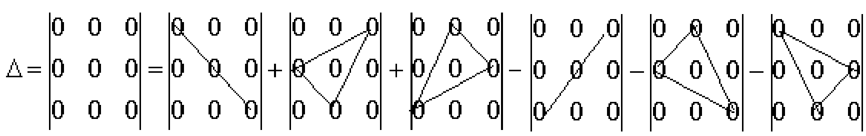
Пример: $\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} = -15 - 8 = -23$

Определителем третьего порядка называется следующее выражение:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Правило треугольников:





Пример: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 6 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot6\cdot1 + 2\cdot2\cdot5 + 4\cdot(-1)\cdot(-3) - (2\cdot6\cdot(-3) + 4\cdot2\cdot1 + 1\cdot5\cdot(-1)) = 71.$

Теорема Лапласа: ***Определителем n-го порядка***, соответствующим матрице A_{nn}, называется число

$$\Delta = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} M_{1j} = a_{11}A_{11} + ... + A_{1j} + ... + a_{1n}A_{1n}.$$

Для вычисления определителя можно использовать элементы произвольной строки или столбца.

<u>Пример</u>: Вычислить данный определитель четвёртого порядка с помощью разложения по строке или столбцу:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 6 & 3 \end{vmatrix}$$

<u>Решение</u>. Удобнее всего делать разложение по строке или столбцу, в которых встречается наибольшее число нулевых элементов. В данном случае – это четвёртый столбец. Итак, имеем

Полученные в итоге два определителя третьего порядка вычислим тем же методом. В определителе Δ_1 нулевых элементов нет, поэтому можно выбрать для разложения любой из столбцов, например, первый. В Δ_2 единственный нулевой элемент находится на пересечении первого столбца со второй строкой. Для разнообразия будем разлагать Δ_2 по второй строке:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 2\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} + 3\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} + 3\cdot(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot(-6-2) - 3\cdot(-6-1) + 3\cdot(-2+1) =$$

$$= -16 + 21 - 3 = 2$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 2\cdot(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot(4-3) - 2\cdot(-2+3) = 1 - 2 = -1$$

Таким образом окончательно получим: $\Delta = \Delta_1 + 3\Delta_2 = 2 + 3\cdot(-1) = -1$

Свойства определителей

1. При транспонировании матрицы определитель не меняется.
2. При перестановке любых двух строк (столбцов) определитель меняет только знак.
3. При умножении строки (столбца) на некоторое число определитель умножается на это число.
4. Если все соответствующие элементы квадратных матриц одного порядка одинаковы, за исключением элементов одной i-ой строки, то
$$\begin{vmatrix} a_{11} \cdots a_{1n} \\ a_{i1} \cdots a_{in} \\ a_{n1} \cdots a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} \cdots a_{1n} \\ b_{i1} \cdots b_{in} \\ a_{n1} \cdots a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} \cdots a_{1n} \\ a_{i1} + b_{i1} \cdots a_{in} + b_{in} \\ a_{n1} \cdots a_{nn} \end{vmatrix}.$$
5. Величина определителя не изменяется, если к элементам некоторой строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженной на некоторое число.

Определитель равен нулю, если:
- все элементы некоторой строки (столбца) равны нулю.
- две строки (столбца) одинаковы.
- две строки (столбца) определителя пропорциональны.

Ход выполнения:

Вариант 1

5. Решите уравнения: а) $\begin{vmatrix} 2x-1 & 3 \\ x+4 & 7 \end{vmatrix} = 0.$ б) $\begin{vmatrix} 1 & x & 1 \\ 4 & 5 & x \\ 0 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 1$

2. Вычислить определители: а) $\begin{vmatrix} 21 & -3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 0 & 9 & 3 \\ 4 & -5 & 2 \\ 1 & 8 & 9 \end{vmatrix}$.

3. Вычислить определители, используя разложение по строке или столбцу:

а) $\begin{vmatrix} 4 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ -7 & 8 & 0 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & 0 \\ -3 & 4 & -5 & 3 \\ -5 & 7 & -7 & 5 \\ 8 & -8 & 5 & 6 \end{vmatrix}$.

Вариант 2

5. Решите уравнение: а) $\begin{vmatrix} x+3 & x-1 \\ 7-x & x-1 \end{vmatrix} = 0.$ б) $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 1 & x-3 & x \\ 3 & 2 & 7 \end{vmatrix} = -3$

2. Вычислить определители: а) $\begin{vmatrix} -8 & 4 \\ -5 & 10 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$.

3. Вычислить определители, используя разложение по строке или столбцу:

а) $\begin{vmatrix} 7 & 1 & -9 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 7 & 10 \\ 3 & 5 & 11 & 0 \\ 2 & -7 & 4 & 3 \end{vmatrix}$.

Вариант 3

1. Решите уравнение: а) $\begin{vmatrix} 2x-1 & x+1 \\ x+2 & x-1 \end{vmatrix} = 0.$ б) $\begin{vmatrix} 3 & x & 1 \\ x-2 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 9 \end{vmatrix} = 2$

2. Вычислить определители: а) $\begin{vmatrix} -7 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & -3 \end{vmatrix}$.

3. Вычислить определители, используя разложение по строке или столбцу:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 9 \\ 1 & -8 & 6 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$

Вариант 4

1. Решите уравнение: а) $\begin{vmatrix} x-2 & x+3 \\ -x-3 & x-2 \end{vmatrix} = 0.$ б) $\begin{vmatrix} 3 & x & 4 \\ -2 & 5 & -2 \\ 0 & x & 9 \end{vmatrix} = 4$

2. Вычислить определители: а) $\begin{vmatrix} 5 & 11 \\ 4 & -7 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 6 \end{vmatrix}$

3. Вычислить определители, используя разложение по строке или столбцу:

а) $\begin{vmatrix} 6 & 0 & 7 \\ 2 & -8 & 0 \\ 1 & 5 & -1 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 8 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & 4 & 7 & 5 \end{vmatrix}$.

Форма отчета: задачи

Практическое занятие № 19

Тема: Решение задач по системам линейных уравнений

Цель:

-закрепить усвоение теоретического материала по данной теме через решение упражнений;

- закрепить умения решать системы линейных уравнений различными методами;
- закрепить умения решать матричные уравнения;
- закрепить умения находить общее решение системы линейных уравнений.

Оборудование: тетрадь, ручка

Методические указания:

Теоретические сведения и методические указания к выполнению заданий

Метод Крамера

Теорема. Пусть Δ - определитель матрицы системы А, а Δ_j - определитель матрицы, полученной из матрицы А заменой j-ого столбца столбцом свободных членов В. Тогда система уравнений имеет единственное решение, определяемое по формулам:

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta} \qquad (j = 1,2,...,n).$$

Пример: Решить систему уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -1, \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 = -1, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7. \end{cases}$$

Решение: Запишем данную систему уравнений на языке матриц.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Вычислим главный определитель матрицы системы:

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 6 + 18 - 12 - (9 - 12 + 12) = 3.$$

Вычислим вспомогательные определители (самостоятельно, у доски):

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & -3 \\ 7 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0, \; \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & -1 & -3 \\ 3 & 7 & 3 \end{vmatrix} = 6, \; \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 3.$$

По формулам Крамера, получаем: $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{0}{3} = 0, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{6}{3} = 2, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{3}{3} = 1.$

Ответ: (0;2;1).

Метод обратной матрицы

Пусть имеется система линейных уравнений AX=B и ее определитель не равен нулю.

$$X = A^{-1} \cdot B \text{ - решение системы.}$$

Пример: Решить систему уравнений методом обратной матрицы:

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -1, \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 = -1, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7. \end{cases}$$

Решение: Система как и прошлом примере, но теперь ее решим методом обратной матрицы.

Найдем обратную матрицу A^{-1}:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3.$$

Транспонируем матрицу $A^T = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$

Находим алгебраические дополнения всех элементов транспонированной матрицы:

$A_{11}^T = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 6 = 9$ $\quad A_{21}^T = -\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} = -(-6+9) = -3$ $\quad A_{31}^T = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -4 - 3 = -7$

$A_{12}^T = -\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -(-6-6) = 12$ $\quad A_{22}^T = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 9 = -3$ $\quad A_{32}^T = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -(4+6) = -10$

$A_{13}^T = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = 6 - 3 = 3$ $\quad A_{23}^T = -\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -(-6+6) = 0$ $\quad A_{33}^T = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 4 = -2$

Выписываем обратную матрицу:

$$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 9 & 12 & 3 \\ -3 & -3 & 0 \\ -7 & -10 & -2 \end{pmatrix}.$$

Тогда $X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 9 & 12 & 3 \\ -3 & -3 & 0 \\ -7 & -10 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Метод Гаусса

Сущность этого метода состоит в том, что посредством последовательных исключений неизвестных данная система превращается в ступенчатую (в частности, треугольную) систему.

Приведение матрицы к треугольному виду называется ***прямым ходом метода Гаусса***.

Нахождение переменных – ***обратным ходом***.

Пример. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3 \\ 7x_1 + x_2 - x_3 = 10 \end{cases}$$

Решение: Составим расширенную матрицу системы.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & -3 \\ 7 & 1 & -1 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ 7 & 1 & -1 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & -7 & 11 \\ 0 & 15 & -22 & 31 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & -7 & 11 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Таким образом, исходная система может быть представлена в виде:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3 \\ 5x_2 - 7x_3 = 11 \\ -x_3 = -2 \end{cases}$$

, откуда получаем: $x_3 = 2$; $x_2 = 5$; $x_1 = 1$.

Ход выполнения:

Вариант 1

1.Проверить совместимость системы уравнений и в случае совместимости решить ее: а) по формулам Крамера; б) с помощью обратной матрицы (матричным методом); в) методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 1, \\ 5x_1 + x_3 = -1. \end{cases}$$

2. Решить матричное уравнение:

$$X \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}. \qquad \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

3.Найти общее решение для каждой из заданных систем алгебраических уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 4, \\ -2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 6, \\ 4x_2 - 3x_3 + x_3 + 5x_4 = 2, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 4. \end{cases}$$

Вариант 2

1.Проверить совместимость системы уравнений и в случае совместимости решить ее: а) по формулам Крамера; б) с помощью обратной матрицы (матричным методом); в) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -5, \\ x_2 - 2x_3 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -1. \end{cases}$$

2. Решить матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 6 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}. \qquad X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

3.Найти общее решение для каждой из заданных систем алгебраических уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = -6, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 7x_4 = -4, \\ -3x_2 - 10x_3 + 6x_4 = -5, \\ 4x_1 + 10x_2 + 2x_3 + 15x_4 = -7. \end{cases}$$

Вариант 3

1.Проверить совместимость системы уравнений и в случае совместимости решить ее: а) по формулам Крамера; б) с помощью обратной матрицы (матричным методом); в) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 3, \\ 3x_1 + 5x_2 = 3. \end{cases}$$

2. Решить матричное уравнение:

$$X\cdot\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 3 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & -1\\ 3 & 4\end{pmatrix}. \qquad \begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}.$$

3.Найти общее решение для каждой из заданных систем алгебраических уравнений

$$\begin{cases}x_1-x_2+3x_3+2x_4=5,\\ 3x_1+x_2-4x_3-x_4=-5,\\ x_2+5x_3-x_4=-2,\\ 5x_1+3x_2-x_3+x_4=5.\end{cases}$$

Вариант 4

1.Проверить совместимость системы уравнений и в случае совместимости решить ее: а) по формулам Крамера; б) с помощью обратной матрицы (матричным методом); в) методом Гаусса.

$$\begin{cases}x_1+2x_2+x_3=8,\\ -2x_1+3x_2-3x_3=-5,\\ 3x_1-4x_2+5x_3=10.\end{cases}$$

2. Решить матричное уравнение:

$$X\cdot\begin{pmatrix}4 & 3\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 8\\ 1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}. \qquad \begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}1 & 0 & 7\\ 8 & 1 & 2\end{pmatrix}.$$

3.Найти общее решение для каждой из заданных систем алгебраических уравнений

$$\begin{cases}2x_1+x_2-x_3+3x_4=20,\\ 5x_1-x_2+2x_3-x_4=17,\\ -3x_1+2x_2-x_3+2x_4=1,\\ x_1-x_2+4x_3-2x_4=-4.\end{cases}$$

Форма отчета: задачи

Практическое занятие № 20

Тема: Решение задач по системам линейных уравнений

Цель: отработать навыки по решению систем методом Крамера.

Оборудование: тетрадь, ручка

Методические указания:

Теоретический материал и методические указания к выполнению заданий

Рассмотрим систему n линейных уравнений с n неизвестными.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots. \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

x_1 , x_2 , …, x_n – неизвестные,

b_1, b_2, …., b_n - столбец свободных членов.

Составим главный определитель системы из коэффициентов при неизвестных

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & \ldots & . \\ a_{n1} & a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Составим вспомогательные определители системы следующим образом:

$$Dx_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & \ldots & . \\ b_n & a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$Dx_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \ldots & a_{2n} \\ . & . & \ldots & . \\ a_{n1} & b_n & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \ldots \quad Dx_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & b_2 \\ . & . & \ldots & . \\ a_{n1} & a_{n1} & \ldots & b_n \end{vmatrix}$$

Тогда решением системы является:

$$x_1 = \frac{Dx_1}{D}, \quad x_2 = \frac{Dx_2}{D}, \quad \ldots, \qquad x_n = \frac{Dx_n}{D}$$

Отметим следующее:

1. Если определитель системы $D \neq 0$, то система определена, т.е. имеет единственное решение
2. Если $D = Dx_1 = Dx_2 = \ldots = Dx_n = 0$, то система имеет бесконечно много решений, т.е. является неопределенной.
3. Если $D = 0$, но хотя бы один из Dx_1, Dx_2, ... , Dx_n не равен нулю, то система несовместна, т.е. не имеет решений.

Из – за арифметических трудностей формулы Крамера на практике используются для систем не выше третьего, четвертого порядка.

<u>Пример</u>: Решить по формулам Крамера систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

Вычислим все определители:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 3 = -5$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 0 = -1$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 1 = -1$$

Отсюда $x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{-1}{-5} = \dfrac{1}{5}$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-1}{-5} = \frac{1}{5}$$

Ответ: $x = \dfrac{1}{5}, \quad y = \dfrac{1}{5}$

<u>Пример:</u> Решить по формулам Крамера систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 = 2 \\ 2x_1 - 3x_3 = 3 \end{cases}$$

Вычислим:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 4 \qquad Dx_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 6$$

$$Dx_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 4 \qquad Dx_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

Тогда:

$$x_1 = \frac{6}{4} = \frac{2}{3} \qquad x_2 = \frac{4}{4} = 1 \qquad x_3 = \frac{0}{4} = 0$$

Ответ: $x_1=2/3$, $x_2=1$, $x_3=0$.

Решение систем линейных уравнений методом Крамера с помощью пакета Excel

<u>Цель:</u> Используя приведенные ниже рисунки, изучите способ решения систем линейных уравнений с помощью пакета **Excel**.

Теория

Функция МОПРЕД - Возвращает определитель матрицы (матрица хранится в массиве).

Синтаксис: МОПРЕД(диапазон ячеек)

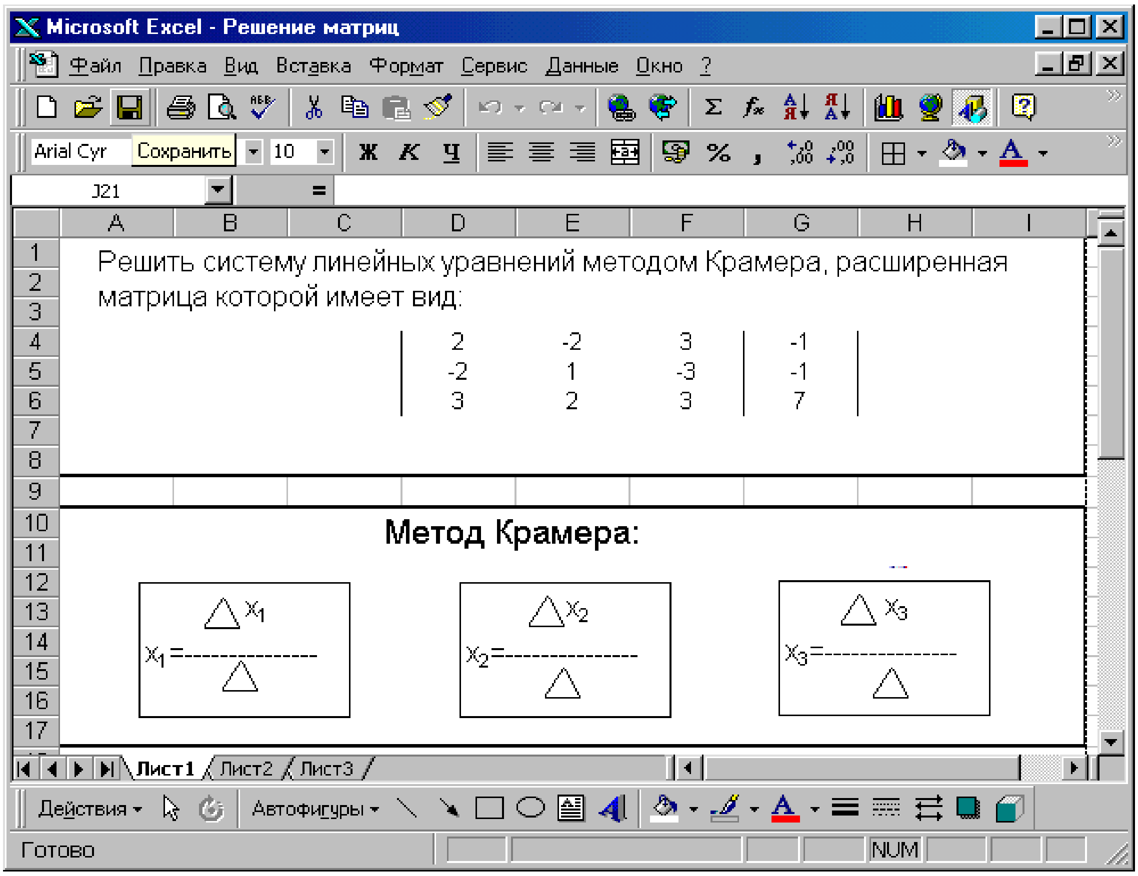
Массив - это числовой массив с равным количеством строк и столбцов.

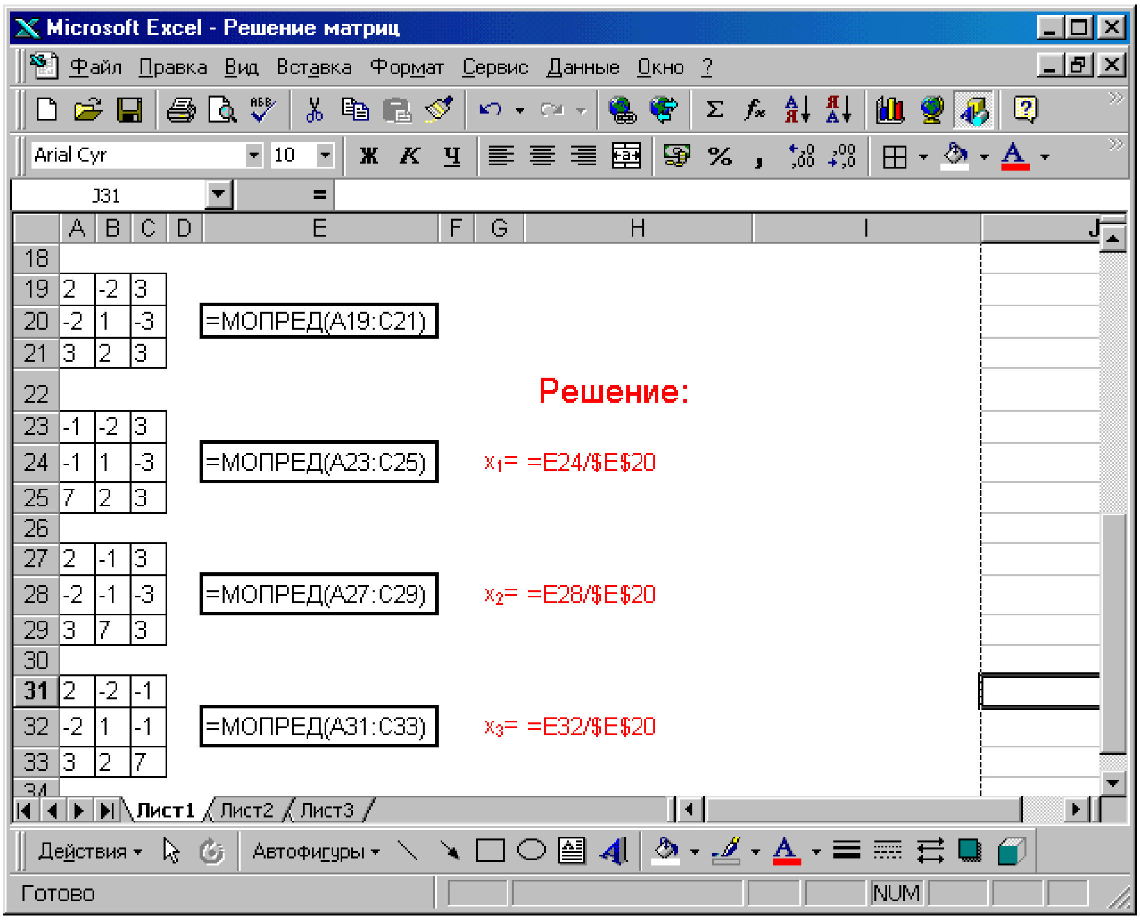
Определитель матрицы - это число, вычисляемое на основе значений элементов массива. Для массива A1:C3, состоящего из трех сток и трех столбцов, определитель вычисляется следующим образом:

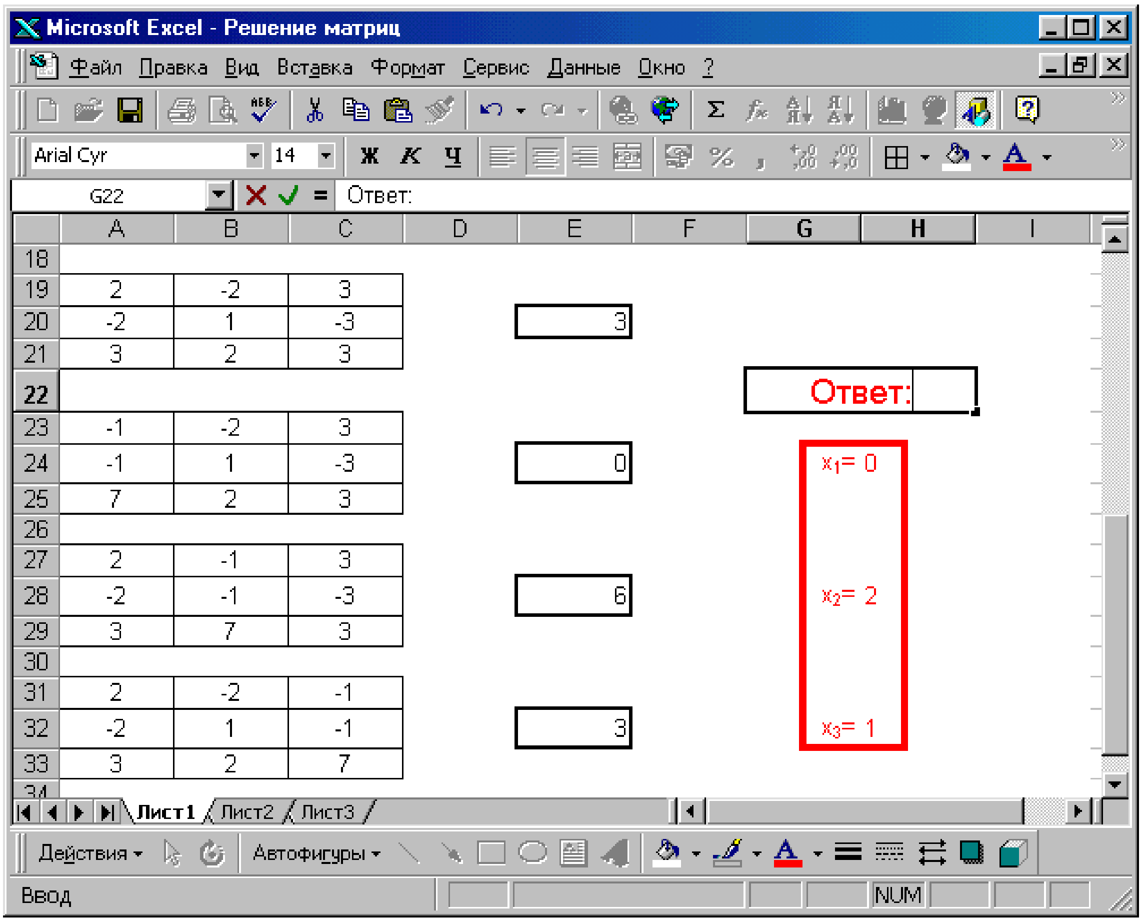
МОПРЕД(A1:C3) равняется A1*(B2*C3-B3*C2) + A2*(B3*C1-B1*C3) + A3*(B1*C2-B2*C1)

Возможные ошибки

- Если какая-либо ячейка в массиве пуста или содержит текст, то функция МОПРЕД возвращает значение ошибки #ЗНАЧ!.
- МОПРЕД также возвращает значение ошибки #ЗНАЧ!, если массив имеет неравное количество трок и столбцов.




Microsoft Excel - Решение матриц
Файл Правка Вид Вставка Формат Сервис Данные Окно ?
Arial Cyr
10
J31
=МОПРЕД(A19:C21)
Решение:
=МОПРЕД(A23:C25)
x1= =E24/$E$20
=МОПРЕД(A27:C29)
x2= =E28/$E$20
=МОПРЕД(A31:C33)
x3= =E32/$E$20
Лист1 Лист2 Лист3
Действия Автофигуры
Готово
NUM


Microsoft Excel - Решение матриц
Файл Правка Вид Вставка Формат Сервис Данные Окно ?
Arial Cyr
14
G22
Ответ:
3
Ответ:
0
x1= 0
6
x2= 2
3
x3= 1
Лист1 Лист2 Лист3
Действия Автофигуры
Ввод
NUM

Ход выполнения:

Варианты заданий:

Вариант	Задание
1	а) $\begin{cases} x+2y-z=2 \\ 2x-3y+2z=2 \\ 3x+y+z=8 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x-3y-3z=-10 \\ x+3y-3z=13 \\ x+y-z=7 \end{cases}$
2	а) $\begin{cases} -x+3y+2z=4 \\ 2x-y+3z=6 \\ -2x+2y-z=8 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x-y+z=-4 \\ x+2y-3z=9 \\ 2x-2y+2z=7 \end{cases}$
3	а) $\begin{cases} 3x-y+2z=-5 \\ 2x+2y-3z=1 \\ x-2y+z=6 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x-y+z=-4 \\ x+2y-z=11 \\ 2x-3y+2z=-2 \end{cases}$
4	а) $\begin{cases} x-3y+z=-7 \\ 2x+y-2z=4 \\ -2x+2y-3z=2 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x-3y+z=9 \\ x-2y+2z=-4 \\ 2x+y-2z=-1 \end{cases}$
5	а) $\begin{cases} x+3y-z=8 \\ 2x-y+4z=-1 \\ -2x+2y+z=4 \end{cases}$ б) $\begin{cases} -x+4y-z=5 \\ 2x-2y+3z=-3 \\ -2x+y+2z=2 \end{cases}$
6	а) $\begin{cases} 2x-2y+3z=4 \\ -x+2y+z=-6 \\ 3x+y-2z=12 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x-y+z=-3 \\ x+2y-4z=7 \\ 2x+y+2z=-1 \end{cases}$
7	а) $\begin{cases} 3x-y+2z=4 \\ x-2y+z=-3 \\ x+3y-z=6 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x-y+3z=3 \\ x-2y+z=8 \\ 3x+2y-z=-1 \end{cases}$
8	а) $\begin{cases} 4x-y+z=6 \\ x+2y-2z=-3 \\ 2x+y-3z=2 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x-y+3z=4 \\ -2x+2y-z=-7 \\ 3x+y-2z=2 \end{cases}$
9	а) $\begin{cases} 2x-y+3z=-1 \\ 3x+y-2z=7 \\ -x+2y+z=4 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+2y-z=9 \\ -2x-3y+z=-5 \\ 3x+y-2z=3 \end{cases}$
10	а) $\begin{cases} 2x-y+3z=-6 \\ x+2y-z=8 \\ 3x-2y+2z=2 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+2y-z=4 \\ 3x-y+2z=7 \\ -x+3y-2z=5 \end{cases}$

Форма отчета: задачи

Практическое занятие № 21

Тема: Решение задач по векторам

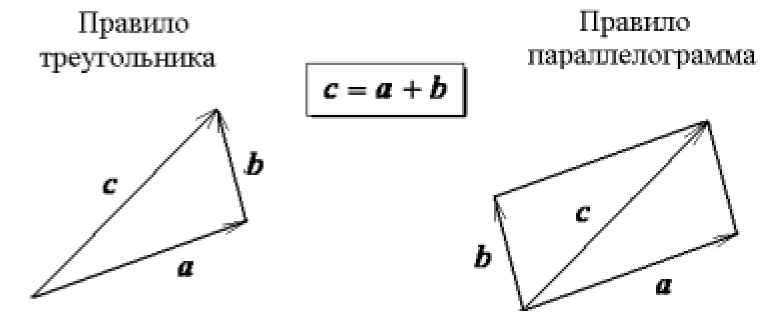
Цель: отработать навыки по решению задач с векторами

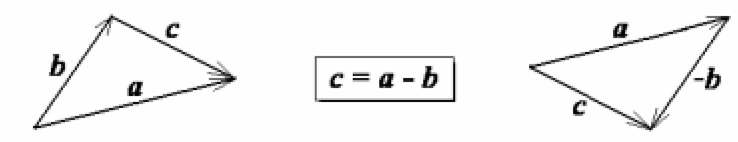
Оборудование: тетрадь, ручка

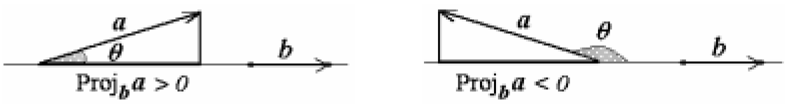
Методические указания:

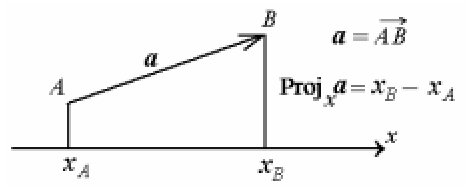
Линейные операции с векторами

1. $\boldsymbol{b} = \lambda \boldsymbol{a}$, если $b_1 = \lambda a_1$, $b_2 = \lambda a_2$ и $b_3 = \lambda a_3$.
2. $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$, если $c_1 = a_1 + b_1$, $c_2 = a_2 + b_2$ и $c_3 = a_3 + b_3$.
3. $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$
4. $\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c}$
5. $\lambda(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \lambda \boldsymbol{a} + \lambda \boldsymbol{b}$









Ход выполнения:

Вариант 1

1) Даны точки $M_1(2,0,6)$, $M_2(2,-2,0)$ и вектор $\vec{a}=\{-2,3,4\}$. Найти $пр_{\vec{a}}\overrightarrow{M_1M_2}$.

2) По данным точкам найти координаты векторов $2\overrightarrow{AC}+4\overrightarrow{BA}$, $3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{BC}$:

$A(-1, 0, -8)$, $B(9, 0, -1)$, $C(3, -1, 2)$;

$A(5, -4, 2)$, $B(0, -2, 1)$, $C(2, 0, 0)$;

$A(-8, -7, -3)$, $B(0, -2, 4)$, $C(-1, -1, 5)$.

3) Найти проекцию вектора $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ на вектор $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$, если известны координаты точек $A(1, -4, 2)$, $B(-2, -1, 1)$, $C(2, 0, 1)$.

Вариант 2

1) Даны точки $M_1(3,2,-1)$, $M_2(-1,-3,2)$ и вектор $\vec{a}=\{2,2,5\}$. Найти $пр_{\vec{a}}\overrightarrow{M_1M_2}$.

2) По данным точкам найти координаты векторов $-5\overrightarrow{CB}-3\overrightarrow{AC}$, $2\overrightarrow{AB}+6\overrightarrow{BC}$:

$A(2, 4, -4)$, $B(2, 0, -4)$, $C(-2, 7, 2)$;

$A(-9, 2, -2)$, $B(-1, 2, -2)$, $C(0, -1, 4)$;

$A(4, 8, 1)$, $B(1, 5, 4)$, $C(3, 0, -1)$.

3) Найти проекцию вектора $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ на вектор $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$, если известны координаты точек $A(3, -2, 1)$, $B(-5, -2, 6)$, $C(4, 1, 0)$.

Форма отчета: задачи

Практическое занятие № 22

Тема: Решение задач по векторам

Цель: отработать навыки по решению задач с векторами

Оборудование: тетрадь, ручка

Методические указания:

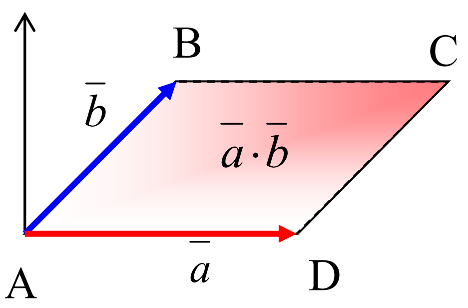
Скалярное произведение векторов, заданных своими координатами

Определение:

Скалярное произведение векторов – это скалярная величина, равная сумме произведений соответствующих координат.

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos(\overline{\vec{a}\vec{b}})$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1+z_2$$



Обозначение: $\bar{a}\cdot\bar{b}$, $\bar{a}\bar{b}$, $(\bar{a},\bar{b})$

Геометрический смысл:

Скалярное произведение двух векторов равно площади параллелограмма, построенного на этих векторах.

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = S_{ABCD}$$

Свойства скалярного произведения.

1. $\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{b} \cdot \bar{a}$ ***Коммутативность***
2. $\bar{a} \cdot \left(\bar{b} + \bar{c}\right) = \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \bar{c}$ ***Дистрибутивность***
3. $\left(\lambda \cdot \bar{a}\right) \cdot \bar{b} = \lambda \cdot \left(\bar{a} \cdot \bar{b}\right)$
4. $\bar{a}^2 = \left|\bar{a}\right|^2$ Скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины (модуля)

Угол между векторами.

$$\cos\alpha = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 + z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

Два вектора называются **коллинеарными**, если выполняется:

$$\bar{a} \,||\, \bar{b} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$$

Свойство: Скалярное произведение ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы перпендикулярны**.**

$$\bar{a} \perp \bar{b} \quad \Leftrightarrow \quad \bar{a} \cdot \bar{b} = 0$$

ПРИМЕР:

Найти скалярное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, если $|\bar{a}| = 2$, $|\bar{b}| = 5$, $\angle(\bar{a};\bar{b}) = \frac{\pi}{6}$

Решение: Используем формулу $\bar{a}\bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos\angle(\bar{a};\bar{b})$. В данном случае:

$$\bar{a}\bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos\angle(\bar{a};\bar{b}) = 2 \cdot 5 \cdot \cos\frac{\pi}{6} = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$$

ПРИМЕР:

Проверить ортогональность векторов: $\bar{a}(1;\, 2;\, -4)$ и $\bar{b}(6;\, -1;\, 1)$

Решение:

Выясним, будут ли ортогональны пространственные векторы. Вычислим их скалярное произведение:

$\bar{a}\bar{b} = 1 \cdot 6 + 2 \cdot (-1) + (-4) \cdot 1 = 6 - 2 - 4 = 0$, следовательно, $\bar{a} \perp \bar{b}$

ПРИМЕР:

При каком значении λ векторы $\overline{a}(3;\ \lambda;\ -2)$, $\overline{b}(2-\lambda;\ -1;\ 5)$ будут ортогональны?

Решение: По условию требуется найти **такое** значение параметра λ, чтобы данные вектор были ортогональны. Два вектора пространства $\overline{v}(v_1;\ v_2;\ v_3)$, $\overline{w}(w_1;\ w_2;\ w_3)$ ортогональны тогда только тогда, когда $v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3 = 0$.

Дело за малым, составим уравнение:

$\overline{a}\overline{b} = 0$

$3\cdot(2-\lambda) + \lambda\cdot(-1) + (-2)\cdot 5 = 0$

Раскрываем скобки и приводим подобные слагаемые:

$6 - 3\lambda - \lambda - 10 = 0$

$-4\lambda - 4 = 0$

Решаем простейшее линейное уравнение:

$-4\lambda = 4$

$\lambda = -1$

Ход выполнения:

1. Даны векторы $\vec{a}$, $\vec{в}$ и $\vec{c}$, причем: $\vec{a} = 4\vec{i} - 3\vec{k}$, $|\vec{в}| = 2$, $\vec{c}\{5;1;m\}$, $(\vec{a}\hat{;}\vec{в}) = 60^0$.
   Найти:
   а). $\vec{a}\cdot\vec{в}$;
   б). значение *m*, при котором $\vec{a}\perp\vec{c}$.

2. Найдите угол между прямыми *AB* и *CD*, если *A(3; -1; 4), B(3; -6; 2), C(2; 7; 3)* и *D(1; 2; 8).*

3. Коллинеарны ли векторы $\overline{c_1}$ и $\overline{c_2}$, разложенные по векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$?

   $\vec{a} = \{1;+2;3\}, \vec{b} = \{-3;0;-1\}, \vec{c}_1 = 2\vec{a} - 4\vec{b}, \vec{c}_2 = 3\vec{a} + \vec{b}$.

4. Перпендикулярны ли векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$, если $\vec{a} = \{1;3;-1\}, \vec{b} = \{3;-2;3\}$.

Форма отчета: задачи

Практическое занятие № 23

Тема: Решение задач по векторам

Цель: отработать навыки по решению задач с векторами

Оборудование: тетрадь, ручка

Ход выполнения:

Вариант №1

1. Какое утверждение **<u>неверное</u>**?

1) Любые два противоположно направленных вектора коллинеарны.
2) Любые два коллинеарных вектора сонаправлены.
3) Любые два равных вектора коллинеарны.

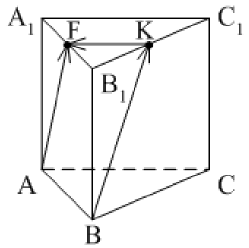
2. Даны точки *A*, *B*, *C*, *D*, *K*. Известно, что $\vec{BC} = k \cdot \vec{DK}$, $\vec{AC} = z \cdot \vec{CD}$, $\vec{AK} = x \cdot \vec{AB} + y \cdot \vec{AC}$.

Тогда **неверно**, что…
1) все точки лежат в одной плоскости;
2) прямые *BC* и *DK* параллельны;
3) точки *A*, *C* и *D* не лежат на одной прямой.

3. Какое утверждение **неверное**?
1) Длины противоположных векторов не могут быть неравны.
2) Если длины векторов неравны, то и векторы неравны.
3) Если длины векторов равны, то и векторы равны.

4. $\vec{AB} = k \cdot \vec{CD}$, причём точки *A*, *B* и *C* не лежат на одной прямой. Прямые *AC* и *BD* **не могут** быть…
1) параллельными;
2) пересекающимися;
3) скрещивающимися.

5. $ABCA_1B_1C_1$ – правильная призма. $A_1F = FB_1$, $B_1K = KC_1$.
Какое утверждение **неверное**?

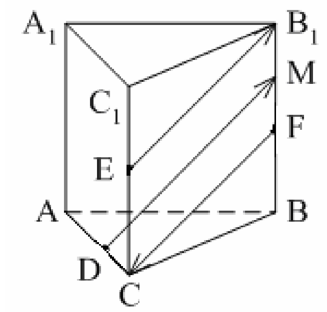


1) $\vec{KF} = -\frac{1}{2}\vec{AC}$.

2) $|\vec{AF}| = |\vec{BK}|$.

3) $\vec{AF} = \vec{BK}$.

6. $ABCA_1B_1C_1$ – правильная призма. $CE = EC_1$, $BF = FB_1$, $FM = MB_1$, $AD : DC = 3 : 1$.
Какое утверждение **верное**?

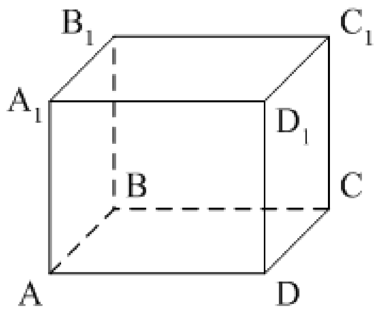


1) $\vec{DM} \uparrow\uparrow \vec{EB_1}$.

2) $\vec{FC} \uparrow\downarrow \vec{DM}$.

3) $\vec{EB_1} \uparrow\downarrow \vec{FC}$.

7. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – параллелепипед. $\vec{AD} = \ldots$



1) $\vec{BB_1} + \vec{DC_1}$;

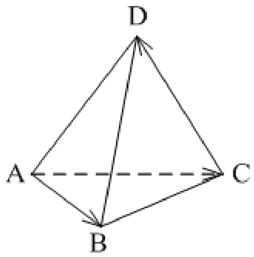
2) $\vec{D_1C_1} - \vec{DC_1} - \vec{D_1A_1} + \vec{BB_1}$;

3) $\vec{AB_1} - \vec{BC} + \vec{BA} - \vec{CC_1}$.

8. Векторы $\vec{AC_1} - \vec{AC} - \vec{A_1C_1}$ и $\vec{A_1A} - \vec{CB} + \vec{AB}$ **<u>являются</u>**…
1) равными;
2) противоположными;
3) сонаправленными

9. $DABC$ – тетраэдр. $\vec{AC} = \vec{AB} - \vec{x} - \vec{CD}.$

Тогда $\vec{x} = \ldots$



1) $\vec{DA}$;

2) $\vec{BC}$;

3) $\vec{DB}$.

B1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – параллелепипед.

Тогда $\vec{AC} + \vec{BB_1} + \vec{BA} + \vec{D_1B} + \vec{B_1D_1} + \vec{DC} = \ldots$

Вариант №2

1. Какое утверждение **<u>верное</u>**?

1) Любые два сонаправленных вектора коллинеарны.
2) Любые два коллинеарных вектора противоположно направлены.
3) Любые два коллинеарных вектора равны.

2. Какое утверждение **верное**?

1) Если $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b},\ \vec{b} \uparrow\downarrow \vec{c}$, то $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{c}$.

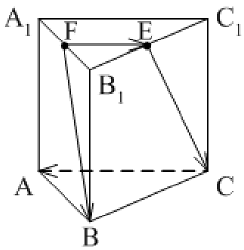
2) Если $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b},\ \vec{b} \uparrow\downarrow \vec{c}$, то $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{c}$.

3) Существуют векторы $\vec{a},\ \vec{b}$ и $\vec{c}$ такие, что $\vec{a}$ и $\vec{c}$ не коллинеарны, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ не коллинеарны, а $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.

3. Какое утверждение **неверное**?
1) Если длины векторов равны, то и векторы равны.
2) Если векторы равны, то их длины равны.
3) Длины противоположных векторов равны.

4. $\vec{AB} = k \cdot \vec{CD}$, причём точки A, B и C не лежат на одной прямой. Прямые AC и BD **являются** параллельными, если…
1) $k = 1$;
2) $k = -1$;
3) $k = 3$.

5. $ABCA_1B_1C_1$ – правильная призма. $A_1F = FB_1$, $B_1E = EC_1$. Какое утверждение **неверное**?

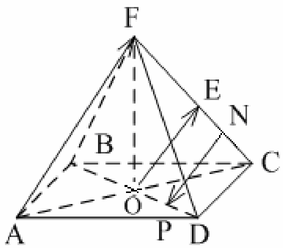


1) $\vec{FE} = \frac{1}{2}\vec{CA}$.

2) $|\vec{FB}| = |\vec{EC}|$.

3) $\vec{FB} \parallel \vec{EC}$.

6. $FABCD$ – правильная пирамида. $AC \cap BD = O$, $FE = EC$, $EN = NC$, $OP = PD$. Какое утверждение **верное**?

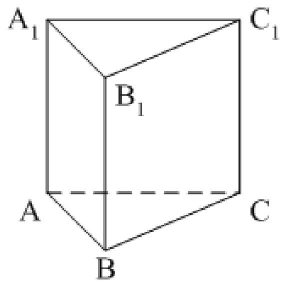


1) $\vec{AF} \uparrow\uparrow \vec{OE}$.

2) $\vec{OE} \uparrow\downarrow \vec{NP}$.

3) $\vec{NP} \uparrow\downarrow \vec{AF}$.

7. $ABCA_1B_1C_1$ – призма. $\vec{CA} =$ …



1) $\vec{AA_1} + \vec{AB} + \vec{B_1C}$;

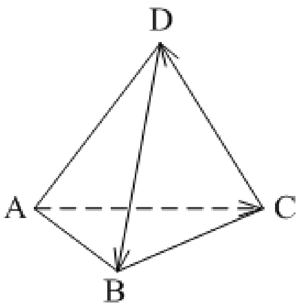
2) $\vec{AA_1} - \vec{AB} - \vec{BC_1}$;

3) $\vec{AA_1} - \vec{CA} + \vec{BB_1}$.

8. Векторы – $\vec{MN} + \vec{MK} - \vec{AK}$ и $\vec{DC} - \vec{DA} - \vec{NC}$ **являются**…

1) противоположными;
2) равными;
3) сонаправленными.

9. *DABC* – тетраэдр.
$\vec{CD} = \vec{x} - \vec{DB} - \vec{AC}$ …



1) $\vec{BA}$;

2) $\vec{AB}$;

3) $\vec{BC}$.

B1. . $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – параллелепипед.

Тогда $\vec{B_1D_1} + \vec{C_1C} + \vec{C_1B} + \vec{AC_1} + \vec{CA} + \vec{A_1D_1} =$

Глава V Метод координат

Вариант №1

1. Точка *M* (–2; 3; –7) находится от плоскости *XOY* на расстоянии, равном…
1) 7;
2) 2;
3) 3.

2. $\vec{m} = 2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$. Тогда вектор $\vec{m}$ **имеет** координаты…

1) $\vec{m}\,\{2; 1; 1\}$;

2) $\vec{m}\,\{-2; 1; 1\}$;

3) $\vec{m}\,\{\,2; -1; -1\,\}$.

3. $\vec{a}\,\{1; 2; -3\}$, $\vec{b}\,\{-3; 2; 1\}$, $\vec{c}\,\{-3; -6; 9\}$. Тогда коллинеарными **будут** векторы…

1) $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

2) $\vec{b}$ и $\vec{c}$;

3) $\vec{a}$ и $\vec{c}$.

4. Первая и третья координаты ненулевого вектора $\vec{a}$ равны нулю. Тогда **неверно,** что…

1) $\vec{a} \parallel OX$;

2) $\vec{a} \perp OZ$;

3) $\vec{a} \perp (XOZ)$.

5. Первая координата ненулевого вектора $\vec{AB}$ равна нулю. Тогда **неверно**, что…

1) $\vec{AB} \perp OX$;

2) $\vec{AB} \cap$

3) $\vec{AB} \parallel OY$.

6. *A* (1; 2; 3), *B* (1; 5; 4), *C* (4; 5; 3). Тогда **верно**, что…

1) $\vec{BC} \perp OY$;

2) $\vec{AC} \parallel OZ$;

3) $\vec{AB} \parallel (ZOY)$.

7. Ордината точки *A* равна 3, ордината точки *B* равна 6. Длина отрезка *AB* равна 3. Тогда прямая *AB* и ось *OY*…

1) параллельны;

2) перпендикулярны;

3) скрещиваются.

8. $M\,(x_1; y_1; z_1)$, $K\,(x_2; y_2; z_2)$. Тогда координаты вектора $\vec{KM}$ **равны**…

1) $\{x_1 - x_2;\ y_1 - y_2;\ z_1 - z_2\}$;

2) $\{x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1\}$;

3) $\left\{ \dfrac{x_1+x_2}{2};\ \dfrac{y_1+y_2}{2};\ \dfrac{z_1+z_2}{2} \right\}.$

9. $\vec{a}\,\{m; n; k\}.$ Тогда **верно**, что…

1) $|\vec{a}| = \sqrt{m+n+k};$

2) $|\vec{a}| = \sqrt{m^2+n^2+k^2};$

3) $|\vec{a}| = \sqrt{m\,n\,k}.$

Уровень В

1. Дана точка *A* (–1; 2; 5). Тогда координаты точки – проекции точки *A* на ось *OZ* равны…

2. Даны точки *M* (–1; 2; 3) и *B* (1; –1; 5). Тогда координаты вектора $\vec{BM}$ равны…

3. *A* (–1; 0; 2), *B* (1; –2; 3). Тогда $|\vec{AB}| =$ …

4. *ABCD* – параллелограмм, $AC \cap BD = O.$ *B* (–2; 1; 0), *O* (0; 1,5; 0). Тогда координаты точки *D* равны…

5. Вектор $\vec{a}$ сонаправлен с вектором $\vec{b}\,\{-2; 2; 1\},\ |\vec{a}| = 12.$ Тогда координаты вектора $\vec{a}$ равны…

Вариант №2

Уровень А

1. Точка *A* (–1; 2; –3) находится от плоскости *YOZ* на расстоянии, равном…
1) 1;
2) 2;
3) 3.

2. $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}.$ Тогда вектор $\vec{a}$ **имеет** координаты…

1) $\vec{a}\,\{1; 1; 3\};$

2) $\vec{a}\,\{-1; 1; -3\};$

3) $\vec{a}\,\{1; -1; 3\}.$

3. Координаты равных векторов…
1) равны;
2) противоположны;
1) пропорциональны.

4. Первая и вторая координаты ненулевого вектора $\vec{a}$ равны нулю. Тогда **верно**, что…

1) $\vec{a} \parallel (XOZ);$

2) $\vec{a} \parallel OX;$

3) $\vec{a} \perp OY$.

5. Третья координата ненулевого вектора $\vec{AB}$ равна нулю. Тогда **неверно**, что…

1) $AB \perp OZ;$

2) $AB \parallel (YOZ);$

3) $AB \cap OX$.

6. *A* (2; 3; 4), *B* (2; 5; 6), *C* (5; 3; 6). Тогда **верно**, что…

1) $AB \parallel (ZOY);$

2) $AC \perp (ZOY);$

3) $BC \perp (XOY)$.

7. Абсцисса точки *A* равна 3, абсцисса точки *B* равна 6. Длина отрезка *AB* равна 3. Тогда прямая *AB* и ось *OX*…

1) параллельны;

2) пересекаются;

3) скрещиваются.

8. $M\,(x_1; y_1; z_1)$, $K\,(x_2; y_2; z_2)$. Тогда длина вектора $\vec{KM}$ **равна**…

1) $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2};$

2) $\sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2 + (z_1 + z_2)^2};$

3) $\sqrt{(x_1 + y_1 + z_1)^2 + (x_2 + y_2 + z_2)^2}.$

9. $A\,(x_1; y_1; z_1)$, $B\,(x_2; y_2; z_2)$. Тогда координаты точки – середины отрезка *AB* **равны**…

1) $(x_2 - x_1;\ \ y_2 - y_1;\ \ z_2 - z_1);$

2) $\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2};\ \dfrac{y_1 + y_2}{2};\ \dfrac{z_1 + z_2}{2}\right);$

3) $\left(\dfrac{x_1 + x_2}{3};\ \dfrac{y_1 + y_2}{3};\ \dfrac{z_1 + z_2}{3}\right).$

Уровень В

1. Дана точка *A* (–1; 2; 5). Тогда координаты точки – проекции точки *A* на плоскость *OYZ* равны…

2. Даны точки *K* (2; –1; –3) и *M* (1; –2; 3). Тогда координаты вектора $\vec{KM}$ равны…

3. *A* (7; 1; –5), *B* (4; –3; –5). Тогда $|\vec{AB}| =$ …

4. В параллелограмме *ABCD* диагонали пересекаются в точке *O*. *A* (1; 3; –1), *O* (0; 1,5; 0). Тогда координаты точки *C* равны…

5. Вектор $\vec{m}$ противоположно направлен вектору $\vec{k}\,\{-1; 2; 1\},\ |\vec{m}| = 3\sqrt{6}.$ Тогда координаты вектора $\vec{k}$ равны…

Форма отчета: задачи

Практическое занятие № 24

Тема: Решение задач по аналитической геометрии

Цель: отработать навыки решения задач

Оборудование: тетрадь, ручка

Методические указания:

Теоретический материал и методические указания к выполнению заданий

ПРЯМАЯ ЛИНИЯ НА ПЛОСКОСТИ

Уравнение с угловым коэффициентом: $y = kx + b$

Уравнение прямой, проходящей через точку A(x_0; y_0) под заданным углом φ: $y - y_0 = k(x - x_0)$

Уравнение прямой, проходящей через две точки: $\dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}$

ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ДВУХ ПРЯМЫХ

Условие параллельности двух прямых $y = kx + b$ и $y = k_1x + b_1$ имеет вид: $k = k_1$

Условие перпендикулярности двух прямых $y = kx + b$ и $y = k_1x + b_1$ имеет вид: $k = -\dfrac{1}{k_1}$

Расстояние d **от точки** $M_0(x_0; y_0)$ **до прямой** $Ax + By + C = 0$ представляет собой длину перпендикуляра, опущенного из точки на прямую и определяется формулой

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Тангенс угла φ **между прямыми** $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ определяется формулой

$$tg\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}\right|$$

Пример:

Треугольник ABC задан координатами вершин. Найти: 1) уравнения сторон треугольника; 2) величину угла наклона прямой AB к оси абсцисс, а также величины внутренних углов треугольника; 3) уравнения высот треугольника и координаты точки P их пересечения; 4) длину медианы AM треугольника; 5) уравнение прямой, проходящей через точку P параллельно прямой AC. Сделать чертеж.

$$A(-1; -1), \quad B(1; 3), \quad C(7; 1).$$

1) Для нахождения уравнений сторон треугольника воспользуемся уравнением $\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{x-x_0}{x_1-x_0}$ прямой, проходящей через две заданные точки $N_0(x_0;y_0)$ и $N_1(x_1;y_1)$. Так как $A(-1;-1)$, $B(1;3)$, то уравнение AB имеет вид $\frac{y-(-1)}{3-(-1)}=\frac{x-(-1)}{1-(-1)}$, или, после упрощения, $y=2x+1$. Аналогично находим уравнения сторон BC и AC.

Уравнение BC: $\frac{y-3}{1-3}=\frac{x-1}{7-1}$ или $y=-\frac{1}{3}x+\frac{10}{3}$.

Уравнение AC: $\frac{y-(-1)}{1-(-1)}=\frac{x-(-1)}{7-(-1)}$ или $y=\frac{1}{4}x-\frac{3}{4}$.

2) Пусть α– величина угла наклона прямой AB к оси абсцисс (см. рис. 1). Тогда $\operatorname{tg}\alpha=k_{AB}=2$, откуда $\alpha\approx 63°$.

Найдем углы треугольника по формуле

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2},$$

$\operatorname{tg}\hat{A}=\dfrac{2-\frac{1}{4}}{1+2\cdot\frac{1}{4}}=\dfrac{7}{6},$ откуда $\hat{A}\approx 49°$.

$\operatorname{tg}\hat{B}=\dfrac{(-\frac{1}{3})-2}{1+2\cdot(-\frac{1}{3})}=-7,$ откуда $\hat{B}\approx 180°-81°=99°$.

$\operatorname{tg}\hat{C}=\dfrac{\frac{1}{4}-(-\frac{1}{3})}{1+\frac{1}{4}\cdot(-\frac{1}{3})}=\dfrac{7}{11},$ откуда $\hat{C}\approx 32°$.

3) Для нахождения уравнений высот треугольника воспользуемся уравнением $y - y_0 = k(x - x_0)$ прямой, проходящей через точку с координатами x_0, y_0 и имеющей угловой коэффициент k. Высота AH есть отрезок прямой, проходящей через точку A перпендикулярно BC. Следовательно, уравнение высоты AH есть $y+1 = k_{AH}(x+1)$, где $k_{AH} = -\frac{1}{k_{BC}} = 3$ (при вычислении k_{AH} использовано условие перпендикулярности прямых). Поэтому уравнение высоты AH имеет вид $y+1 = 3(x+1)$, или $y = 3x+2$.

Аналогично находим уравнения высот BE и CF. Для BE $k_{BE} = -\frac{1}{k_{AC}} = -4$, поэтому уравнение высоты BE есть $y - 3 = -4(x - 1)$, или $y = -4x + 7$.

Для CF $k_{CF} = -\dfrac{1}{k_{AB}} = -\dfrac{1}{2}$, поэтому уравнение CF есть

$y - 1 = -\dfrac{1}{2}(x - 7)$, или $y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{9}{2}$.

Для нахождения координат точки пересечения высот решим систему уравнений, составленную из уравнений прямых AH и BE:

$$\begin{cases} y = 3x + 2, \\ y = -4x + 7. \end{cases}$$

Получаем $x = \dfrac{5}{7}$, $y = 4\dfrac{1}{7}$.

Итак, высоты треугольника пересекаются в точке $P(\frac{5}{7};\ 4\frac{1}{7})$.

4) Координаты x_M, y_M середины M стороны BC можно найти как среднее арифметическое соответствующих координат точек B и C:

$$x_M = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{1+7}{2} = 4, \quad y_M = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{3+1}{2} = 2.$$

Длину медианы AM можно найти по формуле

$$|AM| = \sqrt{(x_A - x_M)^2 + (y_A - y_M)^2},$$

где x_A, y_A– координаты точки A, x_M, y_M– координаты точки M.

Поэтому $|AM| = \sqrt{(-1-4)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{34}$.

5) Уравнение прямой, проходящей через точку P параллельно прямой AC, можно записать в виде $y - y_0 = k(x - x_0)$, где x_0, y_0 - координаты точки P, $k = k_{AC}$– угловой коэффициент прямой AC. Поэтому искомое уравнение имеет вид

$$y - 4\frac{1}{7} = \frac{1}{4}\left(x - \frac{5}{7}\right), \text{ или } y = \frac{1}{4}x + 3\frac{27}{28}.$$

Ход выполнения:

Вариант 1

Даны координаты вершин треугольника ABC: A (1;-1), B (4; 3), C (5; 1). Найти:

1. уравнения сторон треугольника и их угловые коэффициенты;
2. величину угла наклона прямой AB к оси абсцисс, а также величины внутренних углов треугольника;
3. уравнения высот треугольника и координаты точки P из пересечения;
4. длину медианы AM треугольника;
5. уравнение прямой, проходящей через точку P параллельно прямой AC

6. Построить заданный треугольник и все линии в системе координат:

Вариант 2

Даны координаты вершин треугольника ABC: A (0;-1), B (3; 3), C (4; 1).

Найти:
1. уравнения сторон треугольника и их угловые коэффициенты;
2. величину угла наклона прямой AB к оси абсцисс, а также величины внутренних углов треугольника;
3. уравнения высот треугольника и координаты точки P из пересечения;
4. длину медианы AM треугольника;
5. уравнение прямой, проходящей через точку P параллельно прямой AC
6. Построить заданный треугольник и все линии в системе координат:

Вариант 3

Даны координаты вершин треугольника ABC: A (1; -2), B (4; 2), C (5; 0).

Найти:
1. уравнения сторон треугольника и их угловые коэффициенты;
2. величину угла наклона прямой AB к оси абсцисс, а также величины внутренних углов треугольника;
3. уравнения высот треугольника и координаты точки P из пересечения;
4. длину медианы AM треугольника;
5. уравнение прямой, проходящей через точку P параллельно прямой AC
6. Построить заданный треугольник и все линии в системе координат:

Вариант 4

Даны координаты вершин треугольника ABC: A (2; -2), B (5; 2), C (6; 0).

Найти:
1. уравнения сторон треугольника и их угловые коэффициенты;
2. величину угла наклона прямой AB к оси абсцисс, а также величины внутренних углов треугольника;
3. уравнения высот треугольника и координаты точки P из пересечения;
4. длину медианы AM треугольника;
5. уравнение прямой, проходящей через точку P параллельно прямой AC
6. Построить заданный треугольник и все линии в системе координат:

Форма отчета: задачи

Практическое занятие № 25

Тема: Решение задач по аналитической геометрии

Цель: отработать навыки решения задач

Оборудование: тетрадь, ручка

Методические указания:

Теоретический материал и методические указания к выполнению заданий

Кривой второго порядка называется линия, которая аналитически определяется уравнением 2-й степени относительно x и y.

$$\boxed{Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0}\text{, где}$$

A, B, C, D, E, F – действительные числа.

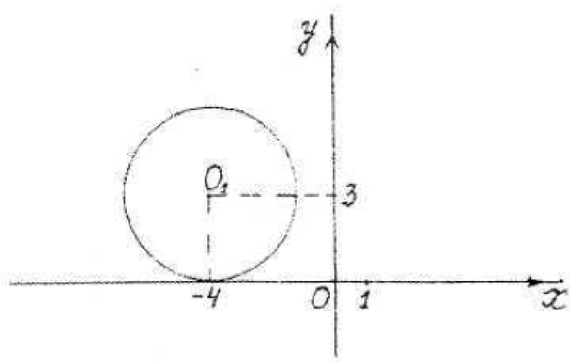
Уравнения окружности

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$$

Пример: Построить линии по уравнениям в прямоугольной системе координат:

$$(x+4)^2 + (y-3)^2 = 9.$$

Уравнением окружности с центром в начале координат и радиусом R является уравнение $x^2 + y^2 = R^2$. Следовательно, $(x+4)^2 + (y-3)^2 = 9$ есть уравнение окружности с центром в точке O_1 с координатами $x = -4, y = 3$ и радиусом $R = 3$ (см. рис. 6).



Каноническое уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

a- большая полуосью эллипса

b - малая полуосью эллипса

$c = \sqrt{a^2 - b^2}$; *- полуфокусное расстояние*

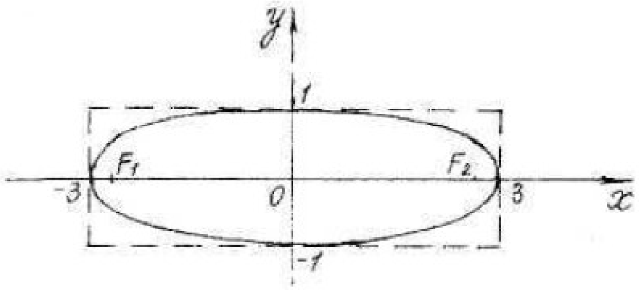
$\varepsilon = \dfrac{c}{a}$.*- эксцентриситет эллипса*

$x = \pm\dfrac{a}{\varepsilon}$ *- директрисы эллипса*

Пример: Построить линии по уравнениям в прямоугольной системе координат:

$$\frac{x^2}{9} + y^2 = 1,$$

Каноническим уравнением эллипса является уравнение $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, при этом фокусы находятся в точках $F_1(-c;0)$ и $F_2(c;0)$, где $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ $(a > b)$. Следовательно, $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$ есть уравнение эллипса с полуосями $a = 3$ и $b = 1$. Фокусы эллипса находятся в точках $F_1(-2\sqrt{2};0)$ и $F_2(2\sqrt{2};0)$. Эллипс вписан в прямоугольник со сторонами $x = 3$, $x = -3$, $y = 1$, $y = -1$, центр эллипса находится в начале координат



Пример Установить вид линии второго порядка, привести уравнение к каноническому виду и построить эту линию: $x^2 + y^2 + 4x + 2y + 1 = 0$,

Решение: Уравнение $x^2 + y^2 + 4x + 2y + 1 = 0$ определяет окружность, так как $A=C=1$. Для получения канонического уравнения окружности выделим полные квадраты по переменным x и y:

$$\left(x^2 + 4x + 4\right) + \left(y^2 + 2y + 1\right) - 4 = 0,$$

$$(x+2)^2 + (y+1)^2 = 4.$$

Итак, получено каноническое уравнение окружности с центром в точке (-2,-1) и радиусом $R=2$

Пример: Установить вид линии второго порядка, привести уравнение к каноническому виду и построить эту линию: $5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 0$

Решение: Уравнение $5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 0$ определяет эллипс, так как $A \times C = 5 \times 9 > 0$. Чтобы получить каноническое уравнение эллипса, выделим полные квадраты по переменным x и y и поделим полученное уравнение на свободный член:

$$5\left(x^2 - 6x + 9\right) + 9\left(y^2 + 2y + 1\right) + 9 - 5\times 9 - 9 = 0,$$

$$5(x-3)^2 + 9(y+1)^2 = 45,$$

$$\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{5} = 1.$$

Итак, получено каноническое уравнение эллипса с центром в точке (3,-1) и полуосями $a = 3$ (большая) и $b = \sqrt{5}$ (малая).

Ход выполнения:

Вариант 1

1. Определить тип линии по уравнениям и построить в прямоугольной системе координат:

a. $(x+3)^2+(y-2)^2=9$

b. $x^2+(y+5)^2=1$

c. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$

d. $\frac{(x-4)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{25}=1$

2. Составить уравнение окружности с центром в точке $C(1;4)$ и радиусом $R=3$. Проверить, лежат ли на этой окружности точки $D(0;5)$, $A(1;7)$, $B(2;3)$.

3. Установить вид линии второго порядка, привести уравнение к каноническому виду и выписать основные элементы:

a. $x^2+y^2+56x+4y=0$

b. $4x^2+y^2+20x+1=0$

c. $x^2+y^2-x+4=0$

d. $x^2+y^2+4x+5y-9=0$

e. $x^2+4y^2-16=0$

f. $2x^2+3y^2+16x+12y-6=0$

Вариант 2

1. Определить тип линии по уравнениям и построить в прямоугольной системе координат:

a. $(x-6)^2+(y+1)^2=1$

b. $(x-4)^2+y^2=25$

c. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$

d. $\frac{(x+4)^2}{4}+\frac{(y-2)^2}{36}=1$

2. Составить уравнение окружности с центром в точке $C(-1;2)$ и радиусом $R=4$. Проверить, лежат ли на этой окружности точки $D(0;5)$, $A(-1;6)$, $B(2;3)$.

3. Установить вид линии второго порядка, привести уравнение к каноническому виду и выписать основные элементы:

a. $x^2+y^2+18x+6y=0$

b. $5x^2+y^2+20x-4=0$

c. $x^2+y^2-y-6=0$

d. $x^2+y^2+7x+8y-3=0$

e. $6x^2+y^2-36=0$

f. $5x^2+7y^2+30x+14y-6=0$

Вариант 3

1. Определить тип линии по уравнениям и построить в прямоугольной системе координат:

a. $(x-3)^2+(y+7)^2=4$

b. $(x-5)^2+y^2=9$

c. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{36}=1$

d. $\frac{(x+3)^2}{9}+\frac{(y+2)^2}{25}=1$

2. Составить уравнение окружности с центром в точке $C(0;5)$ и радиусом $R=1$. Проверить, лежат ли на этой окружности точки $D(0;6)$, $A(-1;6)$, $B(2;3)$.

3. Установить вид линии второго порядка, привести уравнение к каноническому виду и выписать основные элементы:

a. $x^2+y^2+8x+16y=0$

b. $3x^2+y^2+24x-6=0$

c. $x^2+y^2-x-3=0$

d. $x^2+y^2+5x+4y-3=0$

e. $x^2+9y^2-45=0$

f. $6x^2+7y^2+36x+28y-1=0$

Вариант 4

1. Определить тип линии по уравнениям и построить в прямоугольной системе координат:

a. $(x-1)^2+(y+9)^2=9$

b. $(x+7)^2+y^2=4$

c. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{49}=1$

d. $\frac{(x+1)^2}{36}+\frac{(y-3)^2}{9}=1$

2. Составить уравнение окружности с центром в точке $C(4;0)$ и радиусом $R=2$. Проверить, лежат ли на этой окружности точки $D(0;6)$, $A(-1;6)$, $B(6;0)$.

3. Установить вид линии второго порядка, привести уравнение к каноническому виду и выписать основные элементы:

a. $x^2 + y^2 + 10x + 12y = 0$

b. $7x^2 + y^2 + 28x - 2 = 0$

c. $x^2 + y^2 - x - 6 = 0$

d. $x^2 + y^2 + 7x + 9y - 3 = 0$

e. $x^2 + 16y^2 - 64 = 0$

f. $6x^2 + 3y^2 + 54x + 27y - 2 = 0$

Форма отчета: задачи

4. ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ

4.1 Печатные издания:

Основные:

О-1 *Ельчанинова, Г. Г. Элементы высшей математики. Типовые задания с примерами решений: учебное пособие / Г. Г. Ельчанинова, Р. А. Мельников. — Санкт-Петербург: Лань, 2020. — 92 с.*

О-2 Шевелев, Ю. П. Дискретная математика: учебное пособие / Ю. П. Шевелев. — 4-е изд., стер. — Санкт-Петербург: Лань, 2019. — 592 с.

Дополнительные:

Д-1 Григорьев В.П., Дубинсий Ю.А. Элементы высшей математики: Учебник / Григорьев В.П., Дубинсий Ю.А. – М.: Форум, 2008 – 252 с.

Д-2 Боголюбов Н.В. Практические занятия по математике: Учебник / Боголюбов Н.В. – М.: Высшая школа, 2000 – 283 с.

4.2 Электронные издания (электронные ресурсы):

1. Григорьев В.П., Дубинсий Ю.А. Элементы высшей математики: Учебник / Григорьев В.П., Дубинсий Ю.А. – М.: ИЦ Академия, 2019. – 256 с.

2. Комогорцев В.Ф. Высшая математика: Учебник / В.Ф. Комогорцев - Брянск: Изд-во Брянский ГАУ, 2018. – 259 с. - ЭБС Академия;

3. *www.school-collection.edu.ru – единая коллекции Цифровых образовательных ресурсов.*

ЛИСТ ИЗМЕНЕНИЙ И ДОПОЛНЕНИЙ, ВНЕСЕННЫХ В МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

<table>
<tr><td colspan="2">№ изменения, дата внесения, № страницы с изменением</td></tr>
<tr><td>Было</td><td>Стало</td></tr>
<tr><td colspan="2">Основание:

Подпись лица, внесшего изменения</td></tr>
</table>