ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ИРКУТСКОЙ ОБЛАСТИ
«ЧЕРЕМХОВСКИЙ ГОРНОТЕХНИЧЕСКИЙ КОЛЛЕДЖ ИМ. М.И. ЩАДОВА»

РАССМОТРЕНО
на заседании ЦК
«Информатики и ВТ»
«31» июнь 2022 г.
Протокол № 10
Председатель: Окладникова Т.В.

УТВЕРЖДАЮ
И.о. зам. директора по УР
О.В. Папанова
«15» июнь 2022 г.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

для выполнения
практических работ студентов
по учебной дисциплине

ЕН.01 ЭЛЕМЕНТЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

09.02.07 Информационные системы и программирование

Разработал:
преподаватель
Литвинцева Е.А.

2022 г.

СОДЕРЖАНИЕ

1. ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Методические указания по выполнению практических (лабораторных) работ по учебной дисциплине **«Элементы высшей математики»** предназначены для студентов специальности **09.02.07 Информационные системы и программирование**, составлены в соответствии с рабочей программой дисциплины **«Элементы высшеи математики»** с учетом рекомендаций **требований Мин. обр.** (помещение кабинета учебной дисциплины **«Элементы высшей математики»** должны удовлетворять требованиям санитарно-эпидемиологических правил и нормативов (СанПиН 2.4.2 № 178-02), и оснащено типовым оборудованием, указанным в настоящих требованиях, в том числе специализированной учебной мебелью и средствами обучения, достаточными для выполнения требований к уровню подготовки студентов') и направлены на достижение следующих целей:

– формирование у студентов представлений о роли элементах высшей математики в современном обществе;

– формирование у студентов умений осуществлять поиск и использование информации, необходимой для эффективного выполнения профессиональных задач, профессионального и личностного развития;

– приобретение студентами опыта использования элементов высшей математики в индивидуальной и коллективной учебной и познавательной деятельности;

Методические указания являются частью учебно-методического комплекса по дисциплине **«Элементы высшей математики» и** содержат задания, указания для выполнения практических (лабораторных) работ, теоретический минимум и т.п. Перед выполнением практической работы каждый студент обязан показать свою готовность к выполнению работы:

- ответить на теоретические вопросы преподавателя.

По окончанию работы студент оформляет отчет в тетради и защищает свою работу.

В результате выполнения полного объема практических работ студент должен уметь:

— выполнять операции над матрицами и решать системы линейных уравнений;

– применять методы дифференциального и интегрального исчисления;

– решать дифференциальные уравнения.

При проведении практических работ применяются следующие технологии и методы обучения:

1. проблемно-поисковых технологий
2. тестовые технологии

Правила выполнения практических работ:

1. Запомните порядок проведения практических работ, правила их оформления.
2. Изучите теоретические аспекты практической работы
3. Выполните задания практической работы.
4. Оформите отчет в тетради.

Требования к рабочему месту:

См. Письмо Минобрнауки РФ от 24 ноября 2011 г. N МД-1552/03 «Об оснащении общеобразовательных учреждений учебным и учебно-лабораторным оборудованием»

- посадочные места по количеству студентов,
- рабочее место преподавателя,
- дидактическое обеспечение дисциплины:
- сборник практических работ

  сборник заданий для самостоятельной работы студентов
- таблицы, чертежные инструменты.

Технические средства обучения:

Интерактивная доска, компьютер, диапроектор.

Критерии оценки:

Оценки «5» (отлично) заслуживает студент, обнаруживший при выполнении заданий всестороннее, систематическое и глубокое знание учебно - программного материала, учения свободно выполнять профессиональные задачи с всесторонним творческим подходом, обнаруживший познания с использованием основной и дополнительной литературы, рекомендованной программой, усвоивший взаимосвязь изучаемых и изученных дисциплин в их значении для приобретаемой специальности, проявивший творческие способности в понимании, изложении и использовании учебно- программного материала, проявивший высокий профессионализм, индивидуальность в решении поставленной перед собой задачи, проявивший неординарность при выполнении практического задания.

Оценки «4» (хорошо) заслуживает студент, обнаруживший при выполнении заданий полное знание учебно- программного материала, успешно выполняющий профессиональную задачу или проблемную ситуацию, усвоивший основную литературу, рекомендованную в программе, показавший систематический характер знаний, умений и навыков при выполнении теоретических и практических заданий по дисциплине «Математика».

Оценки «3» (удовлетворительно) заслуживает студент, обнаруживший при выполнении практических и теоретических заданий знания основного учебно-программного материала в объеме, необходимом для дальнейшей учебной и профессиональной деятельности, справляющийся с выполнением заданий, предусмотренных программой, допустивший погрешности в ответе при защите и выполнении теоретических и практических заданий, но обладающий необходимыми знаниями для их устранения под руководством преподавателя, проявивший какую-то долю творчества и индивидуальность в решении поставленных задач.

Оценки «2» (неудовлетворительно) заслуживает студент, обнаруживший при выполнении практических и теоретических заданий проблемы в знаниях основного учебного материала, допустивший основные принципиальные ошибки в выполнении задания или ситуативной задачи, которую он желал бы решить или предложить варианты решения, который не проявил творческого подхода, индивидуальности.

В соответствии с учебным планом программы подготовки специалистов среднего звена по специальности **09.02.07 Информационные системы и программирование и** рабочей программой на практические (лабораторные) работы по дисциплине **«Элементы высшей математики»** отводится 45 часов.

2. ПЕРЕЧЕНЬ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

№ п\п	Название практической работы	Количество часов
	Раздел 1. Линейная и векторная алгебра	
1	**Практическое занятие №1** Решение задач с использование матрицы третьего порядка.	2
2	**Практическое занятие №2** Анализ системы линейных уравнений. Решение задач с использованием системы линейных уравнений.	2
3	**Практическое занятие №3** Анализ векторная алгебра. Нелинейные операции над векторами.	2
	Раздел 2. Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве	
4	**Практические занятия №4** Анализ метода координат на плоскости. Прямая линия.	2
5	**Практическое занятие №5** Анализ взаимного расположение прямых. Кривые второго порядка.	2
6	**Практическое занятие №6** Решение задач с использованием аналитической геометрии в пространстве.	2
	Раздел 3. Дифференциальное исчисление функции одной переменной	
7	**Практическое занятие №7** Введение в математический анализ.	2
8	**Практическое занятие №8** Решение задач с использованием предел и непрерывность функции.	2
9	**Практическое занятие №9** Анализ производной и ее геометрический смысл. Решение задач с использованием дифференциал функции.	1
10	**Практическое занятие №10** Решение задач с использованием производных и дифференциалы высших порядков.	2
	Раздел 5. Дифференциальное и интегральное исчисление функции нескольких переменных	
11	**Практическое занятие №11** Анализ дифференциального исчисления функции многих переменных	2
12	**Практическое занятие №12** Приложение дифференциального исчисления функции многих переменных	2
13	**Практическое занятие №13** Решение задач с использованием интегральное исчисление функции многих переменных.	2
	№11 Раздел 6. Ряды	
14	**Практическое занятие №14** Анализ числового ряда.	2
15	**Практическое занятие №15** Анализ функционального ряда.	2
	Раздел 7. Дифференциальные уравнения	

16	**Практическое занятие №16** Решение задач с использованием дифференциальные уравнения.	**2**
17	**Практическое занятие №17** Решение задач с использованием дифференциальные уравнения первого порядка.	**2**
18	**Практическое занятие №18** Решение задач с использованием дифференциальные уравнения второго и высших порядков.	**2**
19	**Практическое занятие №19** Анализ линейных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами	**2**
	Раздел 8. Основы теории комплексных чисел	
20	**Практическое занятие №20** Анализ теории комплексных чисел Решение задач с использованием комплексных чисел.	**2**
	Раздел 9. Основные численные методы	
21	**Практическое занятие №21** Решение задач с использованием приближенные числа.	**2**
22	**Практическое занятие №22** Анализ приближенного вычисления определенных интегралов	**2**
23	**Практическое занятие №23** Анализ числового метода.	**2**
	Итого	**45**

3. СОДЕРЖАНИЕ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

Практическая работа № 1

Цель: научиться выполнять действия над матрицами

Задание 1. Изучить теоретические сведения к практической работе

<u>Теоретические сведения к практической работе</u>

Матрицей называется прямоугольная таблица чисел, состоящая из m строк и n столбцов, которую записывают в следующем виде:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Для обозначения матрицы используют прописные латинские буквы, для обозначения элементов матрицы – строчные латинские буквы с указанием номера строки и столбца, на пересечении которых стоит данный элемент. Запись « матрица B имеет размер mхn» означает, что речь идет о матрице, состоящей из m строк и n столбцов. Например, матрица $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ имеет размер 2х3. Далее, b_{ij} - обозначение элемента, стоящего на пересечении i-й строки и j-го столбца данной матрицы (в примере $b_{23}=5$).

При ссылке на i*-ю* строку матрицы A используют обозначение A_i, при ссылке на j*-й* столбец – обозначение A^j.

Матрица, у которой число строк совпадает с числом столбцов, называется *квадратной*. Элементы a_{11} , a_{22} ,…, a_{nn} квадратной матрицы A (размера nхn) образуют *главную диагональ*. Квадратная матрица, у которой отличные от нуля элементы могут стоять только на главной диагонали, называется *диагональной*. Диагональная матрица, у которой все элементы (главной диагонали!) равны 1, называется *единичной*. Наконец, квадратная матрица, у которой ниже (выше) главной диагонали находятся только нули, называется *верхней (нижней) треугольной матрицей*. Например, среди квадратных матриц размера 3х3

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 3 & 1\\ 0 & 3 & 3\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\ E=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 3 & -4 & -2\end{pmatrix}$$

матрица A является верхней треугольной, B – диагональной, C – нижней треугольной, E – единичной.

Матрицы A, B называются *равными* ($A=B$), если они имеют одинаковый размер, и их элементы, стоящие на одинаковых позициях, совпадают.

Арифметические действия с матрицами.

Чтобы *умножить матрицу A на отличное от нуля вещественное число k*, необходимо каждый элемент матрицы умножить на это число:

$$kA=k\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n}\\ ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ ka_{m1} & ka_{m2} & \dots & ka_{mn}\end{pmatrix}.$$

Чтобы найти *сумму матриц A, B* одной размерности, необходимо сложить элементы с одинаковыми индексами (стоящие на одинаковых местах):

$$A+B=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n}\\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n}\\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn}\end{pmatrix}.$$

Пример 1. Найти $2A$-B, если $A=\begin{pmatrix}4 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -3 & 2\end{pmatrix}$.

Решение. Сначала умножаем матрицу A на число «2», затем матрицу B на число «-1», и, наконец, находим сумму полученных матриц:

$$2A-B=2\begin{pmatrix}4 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ -3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & -2\\ 4 & 6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 3 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & -2\\ 7 & 4\end{pmatrix}$$

Имеем: $\begin{vmatrix}2 & -3 & -1\\ 4 & -1 & 2\\ 3 & 5 & 0\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 5 & 0\end{vmatrix}-(-3)\begin{vmatrix}4 & 2\\ 3 & 0\end{vmatrix}+(-1)\begin{vmatrix}4 & -1\\ 3 & 5\end{vmatrix}=$

$$=2(-1\cdot 0-2\cdot 5)+3(4\cdot 0-2\cdot 3)-1(4\cdot 5-(-1)\cdot 3)=-20-18-23=-61.$$

Произведение AB можно определить только для матриц A размера mxn и B размера nxp, при этом $AB=C$, матрица C имеет размер mxp, и ее элемент c_{ij} находится как скалярное произведение *i-й* строки матрицы A на *j-й* столбец матрицы B: $c_{ij}=A_iB^j=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{in}b_{nj}$ $(i=1,2,\ldots,m;$ $j=1,2,\ldots,p)$. Фактически необходимо каждую строку матрицы A (стоящей слева) умножить скалярно на каждый столбец матрицы B (стоящей справа).

Пример 2. Найти произведение матриц $A=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 4\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$.

Решение. Размер матрицы A 3x2, матрицы B 2x2. Поэтому произведение AB найти можно, произведение BA – нет. Действуя по сформулированному выше правилу, получаем:

$$\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 4\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(-1;1)(1,3) & (-1;1)(-2;4)\\ (0;4)(1;3) & (0,4)(-2;4)\\ (2;1)(1;3) & (2;1)(-2;4)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1+3 & 2+4\\ 0+12 & 0+16\\ 2+3 & -4+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 6\\ 12 & 16\\ 5 & 0\end{pmatrix}$$

Матрицей, *транспонированной* к матрице A размера mxn, называется матрица A^T размера nxm, строки которой являются столбцами исходной матрицы.

Например, если $C=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 1\\ 1 & -3 & 3\end{pmatrix}$, то $C^T=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 0 & -3\\ 1 & 3\end{pmatrix}$.

Пример 3. Найти $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} -2 & 4 & 6 \\ 5 & 7 & 3 \end{pmatrix}^T$.

Решение. Воспользовавшись вычислениями, проведенными при решении примера, а также правилами умножения матрицы на число и сложения матриц, получим:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} -2 & 4 & 6 \\ 5 & 7 & 3 \end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 12 & 16 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 4 & 7 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 16 \\ 20 & 30 \\ 17 & 6 \end{pmatrix}.$$

Матрицы А, В называются *эквивалентными*, если одна получена из другой путем элементарных преобразований.

Рангом матрицы A в дальнейшем будем считать число строк эквивалентной ей ступенчатой матрицы, используя обозначение $r(A)$. Так, в рассмотренном выше примере 3.4 $r(A)=3$, $r(B)=2$. Можно доказать, что ранг матрицы A (размера mxn) не может быть больше $\min\{m,n\}$ (например, для матрицы A размера 2x3 $r(A)\le 2$). Кроме того, ранг матрицы не зависит ни от выбора ведущих элементов, ни от проводимых преобразований. Это свойство можно использовать при проверке. Так, в примере 3.4 после перестановки первой и второй строки в матрице B можно в качестве ведущего сначала рассмотреть элемент b_{12}, а затем вычеркнуть третью строку, пропорциональную второй ($C_3=-C_2$):

$$B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 9 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & 9 & 2 & 6 \end{pmatrix}\xrightarrow{C_1\leftrightarrow C_2}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 4 & 9 \\ 1 & 9 & 2 & 6 \end{pmatrix}\rightarrow$$

$$\xrightarrow{C_3=C_3-3C_1}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 4 & 9 \\ -2 & 0 & -4 & -9 \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

Задание 2. Найти линейные комбинации заданных матриц

1.1. 4A-5B, $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & -2 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

1.2. 3A+4B, $A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -5 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 1 \\ 7 & -1 & 0 & 4 \\ 8 & -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

1.3. 2A+4B, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 8 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 16 \\ 0 & 0 & 0 \\ 7 & 10 & 0 \end{pmatrix}$

1.4. 3A+B, $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & -7 & 4 \\ 6 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 5 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1.5. 3A-2B, $A = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 0 \\ -2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -7 & -4 & -1 \\ 2 & -5 & 0 \end{pmatrix}$

Задание 3. Найти произведение матриц

2.1. $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

2.2. $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

2.3. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2.4. $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

2.5. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

Итог работы: решение задач в тетради, защита

Практическая работа № 2

Цель:

1. Познакомиться со способами решения матричных уравнений
2. На конкретных примерах научиться решать системы уравнения с помощью обратной матрицы

Задание 1. Рассмотрим матричное уравнение: $A \cdot X = B$

Так как матрица A — невырожденная, то существует обратная матрица A^{-1}. Умножим обе части уравнения слева на матрицу A^{-1}. По определению обратной матрицы, получим

$$(A^{-1} \cdot A) \cdot X = A^{-1} \cdot B, \quad E \cdot X = A^{-1} \cdot B, \qquad X = A^{-1} \cdot B.$$

Таким образом, искомое решение матричного уравнения определяется формулой:
$\boldsymbol{X = A^{-1} \cdot B}$

Обратите внимание на то, что количество строк матрицы B *должно быть равно порядку матрицы* A .

2. Рассмотрим матричное уравнение: $X \cdot A = B$

Так как матрица A — невырожденная, то существует обратная матрица A^{-1}. Умножим обе части уравнения справа на матрицу A^{-1}. По определению обратной матрицы, получим

$$X \cdot (A \cdot A^{-1}) = B \cdot A^{-1}; \quad X \cdot E = B \cdot A^{-1}; \quad X = B \cdot A^{-1}.$$

Таким образом, искомое решение матричного уравнения: $\boldsymbol{X = B \cdot A^{-1}}$

Обратите внимание на то, что количество столбцов матрицы B *должно быть равно порядку матрицы* A.

Пример 1. Решим матричное уравнение: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение.

1. Вычисляем обратную матрицу A^{-1} методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 1 & -2 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1/5 & 2/5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3/5 & -1/5 \\ 0 & 1 & -1/5 & 2/5 \end{array}\right).$$

Таким образом, обратная матрица имеет вид

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3/5 & -1/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{pmatrix}.$$

2. Обе части уравнения умножаем слева на матрицу A^{-1}.
3. Находим решение уравнения:

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 3/5 & -1/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2/5 \\ 1 & 4/5 \end{pmatrix}.$$

Ответ:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -2/5 \\ 1 & 4/5 \end{pmatrix}.$$

Матричный метод применим к решению систем уравнений, где число уравнений равно числу неизвестных.

Метод удобен для решения систем невысокого порядка.

Метод основан на применении свойств умножения матриц.

Систему уравнений можно записать: A×X = B.

Задание 2. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$$

Итог работы: решение задачи, защита

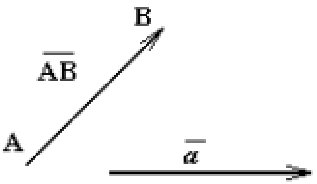
Практическая работа №3

Цель: Повторить понятие вектора, действия с векторами

Задание 1. Изучить теоретические сведения по практической работе

Теоретические сведения

<u>*Определение:*</u> Направленный отрезок (или упорядоченная пара точек) называется ***вектором***.



Вектор обычно обозначается символом $\overline{AB}$, где A – начало, а B – конец направленного отрезка, либо одной буквой $\vec{a}$

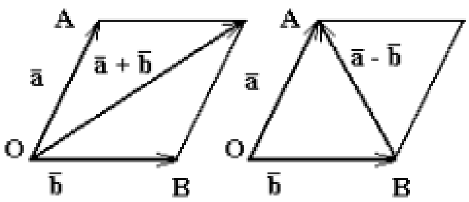


Рис 1.Сложение векторов

<u>*Определение*</u> *Суммой* векторов **a** и **b** называется такой третий вектор **c**, что при совмещенных началах этих трех векторов, векторы **a** и **b** служат сторонами параллелограмма, а вектор **c** -- его диагональю (рис.1). Сложение векторов в соответствии с рисунком называется *сложением по правилу параллелограмма*

Разностью векторов **a** и **b** называется сумма $\mathbf{a} + (-\mathbf{b})$

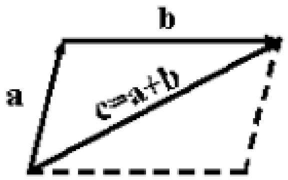


Рис2.Правило треугольника

Однако бывает более удобным использовать для сложения *правило треугольника*, которое становится ясным из рисунка 2. Из того же рисунка видно, что результаты сложения по правилу параллелограмма и по правилу треугольника одинаковы.

Рис.3Умножение вектора на число

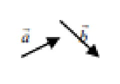
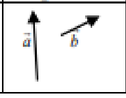
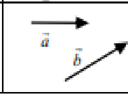
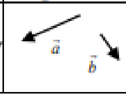
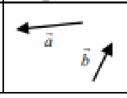
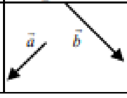
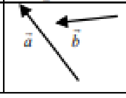
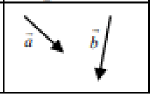
<u>*Определение*</u> *Произведением вектора* **a** *на вещественное число* α называется вектор **b**, определяемый условием

1) $|\mathbf{b}| = |\alpha| \cdot |\mathbf{a}|$ и, если $|\mathbf{b}| \neq 0$, то еще двумя условиями:

2) вектор **b** коллинеарен вектору **a**;
3) векторы **b** и **a** направлены одинаково, если $\alpha > 0$, и противоположно, если $\alpha < 0$.
Произведение вектора **a** на число α обозначается α**a**(рис 3).

Задание 2. Решить следующую задачу (по вариантам)

Постройте векторы 1) $\vec{a}+\vec{b}$; 2) $\vec{a}-\vec{b}$; 3) $2\vec{a}+3\vec{b}$; 4) $2\vec{b}-\vec{a}$

1 вариант	**2 вариант**	**3 вариант**	**4 вариант**	**5 вариант**	**6 вариант**	**7 вариант**	**8 вариант**	**9 вариант**	**10 вариант**
									

Примечание: Вариант уточнить у преподавателя

Итог работы: решение задачи, защита

Практическая работа №4

Цель:

1. Познакомиться с формами заданиями прямой на плоскости.
2. На конкретных примерах научиться составлять различные уравнения прямой.

Задание 1. Изучите теоретические сведения по практической работе

Теоретические сведения

1. $Ax + By + C = 0$ – общее уравнение прямой

а) $a = 0$, $b \neq 0$. Уравнение определяет прямую, параллельную оси абсцисс и пересекающую ось ординат в точке с координатой $y = -\frac{c}{b}$.

б) $b = 0$, $a \neq 0$. Уравнение определяет прямую, параллельную оси ординат и пересекающую ось абсцисс в точке с координатой $x = -\frac{c}{a}$.

в) $c = 0$. Уравнение определяет прямую, проходящую через начало координат.

2. $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$ - уравнение прямой, проходящей через 2 точки (x_1, y_1); (x_2, y_2).

3. $x = x_0 + a_x t, \quad y = y_0 + a_y t$,- параметрические уравнения прямой

4. $\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{в}$ - уравнение прямой, проходящей через точку $A(x_0, y_0)$ и направляющий вектор $\vec{a}(a, в)$

5. $\frac{x}{a}+\frac{y}{в}=1$ - уравнение прямой в отрезках

6. $A(x-x_0) + B(y-y_0) = 0$ – уравнение прямой, проходящей через точку $A(x_0, y_0)$ и нормальный

вектор $\vec{a}(A,B)$

Задание 2. Решить следующую задачу:
Прямая l задана общими уравнениями

$$\begin{cases} x - y + z - 10 = 0; \\ 2x - 8y - z - 23 = 0, \end{cases}$$

и путь требуется написать канонические уравнения этой прямой.
Задание 3. Решить следующую задачу:
4. Пусть даны координаты векторов **a** и **b**: **a** = $\{7,-4,2\}$, **b** = $\{-5,6,1\}$. Найдите координаты векторов **c** = 3**a**, **d** = 2**a** + 4**b** и **e** = 9**b** – 2**d** + **c**.

Итог работы: решения задач, защита

Практическая работа №5

Цель: Рассмотреть решение задач по теме: Взаимное расположение прямых. Кривые второго порядка.

Задание 1. Решить следующие задачи:
1. Уравнение кривой второго порядка $16x^2 - 9y^2 - 144 = 0$ приведите к каноническому виду, определите тип кривой, ее полуоси и фокусы.
2. Определите по уравнениям тип поверхностей второго порядка:
а) $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$;
б) $x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$;
в) $x^2 + y^2 - z^2 = 0$;
г) $x^2 - y^2 - z^2 - 1 = 0$;
д) $4x^2 + y^2 + 9z^2 - 1 = 0$;
е) $x^2 + y^2 - z = 0$;
ж) $x^2 - y^2 - z = 0$;
з) $x^2 - z = 0$.

Итог работы: решение задач, защита

Практическая работа №6

Цель: научиться решать задачи с использованием аналитической геометрии в пространстве
Задание 1. Решить следующую задачу:

Даны координаты вершин треугольника ABC:

$$A(-3;-1),\quad B(4;6),\quad C(8;-2).$$

Требуется: 1) вычислить длину стороны BC; 2) составить уравнение стороны BC; 3) найти внутренний угол треугольника при вершине B; 4) составить уравнение высоты AK, проведенной из вершины A; 5) найти координаты центра тяжести однородного треугольника (точки пересечения его медиан); 6) сделать чертеж в системе координат.

Итог работы: решение задачи, защита

Практическая работа №7

Цель: Введение в математический анализ

Задание 1. Решить следующие задачи:

1. *Построить график функции y=Asin(ax+b) преобразованием графика функции y=sinx.*

$$y=\frac{3}{2}\sin(2x+3)$$

2. *Построить график функции y=Asin(ax+b) преобразованием графика функции y=sinx.*

$$y=\frac{5}{6}\sin\left(\frac{2}{3}x+1\right)$$

Итог работы: решение задач, защита

Практическая работа №8

Цель: на конкретных примерах научиться вычислять пределы различными способами.

Задание 1. Изучить теоретические сведения по практической работе

Теоретические сведения

<u>Типы неопределенностей и методы их раскрытия</u>

Часто при вычислении пределов какой-либо функции, непосредственное применение теорем о пределах не приводит к желаемой цели. Так, например, нельзя применять теорему о пределе дроби, если ее знаменатель стремится к нулю. Поэтому часто прежде, чем применять эти теоремы, необходимо тождественно преобразовать функцию, предел которой мы ищем. Рассмотрим некоторые приемы раскрытия неопределенностей.

I. Неопределенность вида $\frac{0}{0}$

Пример 1. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x-5}{x^2-25}$

Решение: При подстановке вместо переменной x числа 5 видим, что получается неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Для ее раскрытия нужно разложить знаменатель на множители: $x^2 - 25 = (x-5)*(x+5)$, получили общий множитель (x-5), на который можно сократить дробь. Заданный предел примет вид: $\lim\limits_{x\to5}\frac{1}{x+5}$. Подставив x=5, получим результат: $\lim\limits_{x\to5}\frac{x-5}{x^2-25}=\lim\limits_{x\to5}\frac{x-5}{x^2-25}=\lim\limits_{x\to5}\frac{1}{x+5}=\frac{1}{10}$

Пример 2. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-9}$

Решение: При подстановке вместо переменной x числа 3 видим, что получается неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Для ее раскрытия разложим числитель и знаменатель на множители и сократим на общий множитель x-3. В результате получим новый предел, знаменатель которого при подстановке вместо переменной x числа 3 не равен нулю. Этот предел легко вычисляется по теоремам. Таким образом, неопределенность будет раскрыта.

$$\lim_{x\to3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-9}=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(x-2)}{(x-3)(x+3)}=\lim_{x\to3}\frac{x-2}{x+3}=\frac{3-2}{3+3}=\frac{1}{6}$$

Пример 3. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}$

Решение: При подстановке вместо переменной x числа 0 видим, что получается неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Для ее раскрытия воспользуемся первым замечательным пределом $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$ и его следствием $\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\sin x}=1$. После чего предел легко вычисляется по теоремам. Таким образом, неопределенность будет раскрыта.

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}=\lim_{x\to0}(\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\frac{3x}{\sin 3x}\cdot\frac{2}{3})=1\cdot1\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$$

I I. Неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$

Пример 4. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-8x}{4x+5}$

Решение: При подстановке вместо переменной x бесконечности (∞) видим, что получается неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Для ее раскрытия нужно числитель и знаменатель разделить на наивысшую степень, в данном случае на x. Получим:

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-8x}{4x+5}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}-\frac{8x}{x}}{\frac{4x}{x}+\frac{5}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}-8}{4+\frac{5}{x}}=\frac{0-8}{4+0}=\frac{-8}{4}=-2$, т.к. величины $\frac{1}{x},\frac{5}{x}$ являются бесконечно малыми и их пределы равны 0.

Задание 2. Решить следующие задачи:

I вариант	II вариант	III вариант
Оценка «3» (удовлетворительно)		
а) $\lim\limits_{x\to4}\frac{5x+2}{2x+3}$	а) $\lim\limits_{x\to2}\frac{3x-8}{4x+2}$	а) $\lim\limits_{x\to3}\frac{4x+2}{5x-1}$
б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3-2x}{x+1}$	б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x+5}{2x+7}$	б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-8x}{4x+5}$
в) $\lim\limits_{x\to6}\frac{x^2-36}{x-6}$	в) $\lim\limits_{x\to5}\frac{x-5}{x^2-25}$	в) $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2-9}{x-3}$
г) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 2x}{x}$	г) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\sin 3x}$	г) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\sin 5x}$
Оценка «4» (хорошо)		
а) $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^3-2x-3}{x^2+3x+3}$	а) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^3-4x+5}{x^2+6}$	а) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^4-1}{x^3+5x-2}$
б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3-2x^2+3x+1}{4x^3-x^2-7x+8}$	б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+3x-2}{x^4-2x^3+3x-1}$	б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^5-2x^4+3x-1}{x^3+2x^2+4x-2}$
в) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2-6x+8}{x^2-4}$	в) $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-9}$	в) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-1}{5x^2-4x-1}$
г) $\lim\limits_{x\to0}\frac{tg4x}{\sin 3x}$	г) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}$	г) $\lim\limits_{x\to0}\frac{tgx}{\sin 3x}$
Оценка «5» (отлично)		
а) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-1}{x-1}$	а) $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^3-27}{x-3}$	а) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^3-8}{x-2}$
б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8x^3-3x^2+2x}{4x^3-2x+1}$	б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-4x+5}{x^3+4}$	б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+2x-3}{300x-1000}$
в) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{4+x+x^2}-2}{x+1}$	в) $\lim\limits_{x\to2}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{7+2x-x^2}}{x^2-2x}$	в) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}}{x^2-x}$
г) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^2\frac{x}{3}}{x^2}$	г) $\lim\limits_{x\to0}\frac{2x^2}{\sin^2\frac{x}{5}}$	г) $\lim\limits_{x\to0}\frac{tg^2 4x}{\sin^2 x}$

Итог работы: решение задач, защита

Практическая работа №9

Цель: Проверить умения нахождения производной функции.

Задание 1. Изучить теоретический материал.

Теоретические сведения

Таблица производных основных элементарных функций:

1. $(c)' = 0, (cu)' = cu'$;
2. $x' = 1$
3. $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' \quad (n \in R)$
4. $(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$
5. $(\frac{1}{u^n})' = -\frac{n}{u^{n+1}} \cdot u'$
6. $(u+v)' = u' + v'$;
7. $(uv)' = u'v + v'u$;
8. $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$
9. $(e^u)' = e^u \cdot u'$
10. $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$
11. $(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$
12. $(\log_a u)' = \frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$
13. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$
14. $(\cos u)' = \sin u \cdot u'$
15. $(tgu)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$
16. $(ctgu)' = \frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$
17. $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
18. $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
19. $(arctgu)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$
20. $(arcctgu)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$

Задание 2. Решить следующие примеры (по вариантам):

Вариант 1.
Найдите производную

1. $f'(x) = \sqrt{x}\,(x+2)$; **2.** $f'(x) = \frac{x^2+2x}{x-1}$; **3.** $f'(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{4} - \frac{3}{2}x^2 - 3x$; **4.** $f'(x) = (x - 1)(x + 2)$.

5. $f(x) = \sin(2x^2 - 3x + 1)$; **6.** $f(x) = \cos^3(2x - 1)$; **7.** $f(x) = \left(\sqrt{x} + \frac{x^2}{4}\right)^3$.

Вариант 2.
Найдите производную

1. $f'(x) = \sqrt{x} - 1(x+1)$; **2.** $f'(x) = \frac{3x - x^2}{x+2}$; **3.** $f'(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{2}{3}x^3 - \frac{x^2}{2} - 2x$; **4.** $f'(x) = (x + 3)(x - 2)$.

5. $f(x) = \cos(3x^2 - 4x + 2)$; **6.** $f(x) = \sin^3(2 - 3x)$; **7.** $f(x) = (x^2 - 2\sqrt{x})^4$.

Задание 2. Решить следующие задачи (по вариантам)
Вариант 1.
Построить график функции:

1. $y = \frac{2}{x^2 - 4}$; **2.** $y = x(x - 1)^3$.

Вариант 2.

Построить график функции:

1. $y = \dfrac{2}{x^2+4}$; **2.** $y = (x-1)^2 \cdot (x+2)$.

Примечание: Варианты уточнить у преподавателя

Задание 3. Григорьев В.П. Элементы высшей математики: учебник для студ.учреждений сред. проф. образования/ В.П. Григорьев, Ю.А. Дубинский. – 4-е изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия», 2008. – стр. 148, задачи 1,2.

Итог работы: решение примеров, задач, защита

Практическая работа №10

Цель: Провести анализ дифференциального исчисления функции многих переменных

Задание 1. Решить следующие задачи:

1. Пусть $u(x,y) = e^x \cos y$, $v(x,y) = e^x \sin x$. Убедитесь в том, что имеют место тождества

$$\frac{\partial u}{\partial x} \equiv \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} \equiv -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

2. Пусть $u(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. Покажите, что в любой точке (x,y,z) не расположенной в начале координат,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

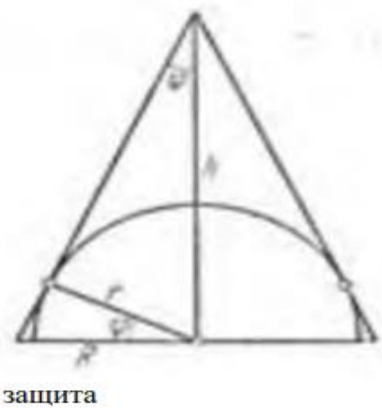
Итог работы: решение задач, защита

Практическая работа №11

Цель: Научиться решать задачи на тему «Приложение дифференциального исчисления функции многих переменных»

Задание 1. Решить следующие задачи:

1. Нужно построить прямоугольную площадку возле каменной стены так, чтобы с трёх сторон она была огорожена проволочной сеткой, а четвёртой стороной примыкала к стене. Для этого имеется а погонных метров сетки. При каком соотношении сторон площадка будет иметь наибольшую площадь?
2. Вокруг полушара радиуса описать прямой круговой конус наименьшего объема; при этом предполагается, что основания полушара и конуса лежат в одной плоскости и концентричны (рис.1).



Итог работы: решение задач, защита

Практическая работа №12,13

Цель: Научиться решать задачи с использованием интегральное исчисление функции многих переменных

Задание 1. Решить следующие задачи:

Пример 1. Вычислить $I = \iint\limits_D (x + y^2) dxdy$, где область D ограничена прямыми $y = 0, y = x, x + y = 4$ (рис. 12).

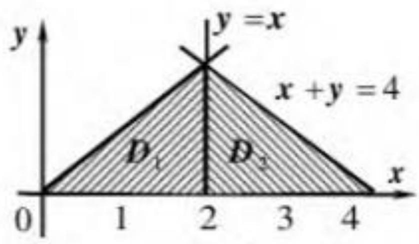
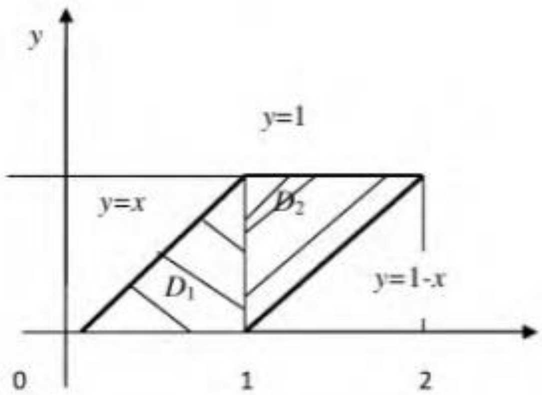


рис. 12

Пример 2. Вычислить $J = \iint\limits_D (x^2 + y^2) dxdy$ по области, ограниченной линиями $y = x$, $y = x - 1$, $y = 1$, $y = 0$.



Итог работы: решение задач, защита

Практическая работа №14

Цель: Произвести анализ числовых рядов.
Задание 1. Изучите теоретические сведения представленные ниже
Теоретические сведения

В общем виде **положительный числовой ряд** можно записать так: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
Здесь:
$\sum$ – математический значок суммы;

a_n – **общий член ряда** (запомните этот простой термин);

n – переменная-«счётчик». Запись $\sum_{n=1}^{\infty}$ обозначает, что проводится суммирование от 1 до «плюс бесконечности», то есть, сначала у нас $n=1$, затем $n=2$, потом $n=3$, и так далее – до бесконечности. Вместо переменной n иногда используется переменная k или m. Суммирование не обязательно начинается с единицы, в ряде случаев оно может начинаться с нуля $\sum_{n=0}^{\infty}$, с двойки $\sum_{n=2}^{\infty}$ либо с любого *натурального числа*.

В соответствии с переменной-«счётчиком» любой ряд можно расписать развёрнуто:
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \ldots$ – и так далее, до бесконечности.

Будем считать, что **ВСЕ** слагаемые $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots$ – это **неотрицательные ЧИСЛА**.

<u>Пример 1</u>

Записать первые три члена ряда
$\sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)$
Это уже, кстати, «боевое» задание – на практике довольно часто требуется записать несколько членов ряда.

Сначала $n=1$, тогда: $2 \cdot 1 + 1 = 3$
Затем $n=2$, тогда: $2 \cdot 2 + 1 = 5$
Потом $n=3$, тогда: $2 \cdot 3 + 1 = 7$

Процесс можно продолжить до бесконечности, но по условию требовалось написать первые три члена ряда, поэтому записываем ответ: $\sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) = 3 + 5 + 7 + \ldots$

Обратите внимание на принципиальное отличие от <u>числовой последовательности</u>, в которой члены не суммируются, а рассматриваются как таковые.

Одной из ключевых задач теории числовых рядов является **исследование ряда на сходимость**. При этом возможны два случая:

1) **Ряд** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **расходится**. Это значит, что бесконечная сумма равна бесконечности: $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+\ldots=\infty$ либо суммы вообще *не существует*, как, например, у ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n=-1+1-1+1-1+\ldots$$

2) **Ряд** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **сходится**. Это значит, что бесконечная сумма равна некоторому *конечному числу* S: $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+\ldots=S$. Пожалуйста: $\sum_{n=1}^{\infty}0^n=0+0+0+\ldots=0$ – этот ряд сходится и его сумма равна нулю.

Задание 2. Решить следующие задачи:

1. Записать первые три члена ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{(4n-3)\cdot 5^n}$$

2. Записать сумму в свёрнутом виде с общим членом ряда

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{3}{27}+\frac{4}{81}+\ldots$$

3. Записать сумму в свёрнутом виде с общим членом ряда

$$\frac{2}{\sqrt[5]{7}}+\frac{4}{\sqrt[5]{14}}+\frac{8}{\sqrt[5]{21}}+\ldots$$

Выполнить проверку, снова записав ряд в развернутом виде

4. Исследовать ряд на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{7n+3}$

5. Записать первые три члена ряда

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}$$

Итог работы: решение задач, защита

Практическая работа №15

Цель: Провести анализ функционального ряда

Задание 1. Решить следующие задачи:

Найти области сходимости (абсолютной и условной) функциональных рядов:

14.47. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln^n x}{n+3}$.

14.48. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n \cos^n x}{n^2+2}$.

14.49. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^n}$.

14.50. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}(x+3)^n}$.

14.51. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sin \frac{x}{4^n}$.

14.52. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x^n \operatorname{tg} \frac{x}{3^n}$.

14.53. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2 x}$.

14.54. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{nx+1}{n}\right)^n$.

14.55. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^{n^2}}{n^2+1}$.

14.56. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{\ln|x|}}$.

14.57. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x^{2n}}$.

14.58. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{3x}{x^2+2}\right)^n$.

Итог работы: решение задач, защита

Практическая работа №16

Цель:

1. На конкретных примерах научиться решать дифференциальные уравнения с разделяющими переменными

Задание 1. Изучить теоретические сведения

Теоретические сведения

Определение. Дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ называется **уравнением с разделяющимися переменными**, если его можно записать в виде

$$y' = \alpha(x)\beta(y) \text{ или } X(x)dx + Y(y)dy = 0;$$

Пример1. Найти решение дифференциального уравнения $\frac{y}{y'} = \ln y$ при условии y(2) = 1.

$$\frac{ydx}{dy} = \ln y \qquad dx = \frac{\ln ydy}{y} \qquad \int dx = \int \frac{\ln ydy}{y} \qquad x + C = \int \ln yd(\ln y)$$

$$x + C = \frac{\ln^2 y}{2} \text{ - общее решение}$$

при y(2) = 1 получаем $2 + C = \frac{\ln^2 1}{2}; \Rightarrow 2 + C = 0; \Rightarrow C = -2;$

Итого: $2(x-2) = \ln^2 y;$ или $y = e^{\pm\sqrt{2x-4}}$ - частное решение;

Пример2. Решить уравнение $y' = x(y^2 + 1)$.

$$\frac{dy}{y^2+1} = dx; \qquad \int \frac{dy}{y^2+1} = \int dx;$$

$$arctgy = \frac{x^2}{2} + C; \qquad y = tg\left(\frac{x^2}{2} + C\right);$$

Задание 2. Решить следующие задачи:

I вариант:	I I вариант:	I I I вариант:
1. Проверить, является ли решением данного дифференциального уравнения указанная функция:		
$x^2 y' - 2xy = 3$ $y = 3x^2 - \frac{1}{x}$	$y' - y \cdot ctgx = ctgx$ $y = \sin x - 1$	$xy' + 2y = e^{x^2}$ $y = 3 - e^{-x^2}$
2. Решите уравнение с разделяющими переменными		
$y' = 1 + x$	$(1 + x^2)y' - 2xy = 0$	$ydy - (1 + 2x)dx = 0$
3. Найдите решение, удовлетворяющее начальному условию		
$(1 + x^3)y' = 3x^2 y$ y(0)=2	$2\sqrt{y}dx - dy = 0$ y(0)=1	$y' + y\sin 2x = 0$ $y(\frac{\pi}{4}) = 1$

Примечание: варианты уточнить у преподавателя

Итог работы: решение задач, защита

Практическая работа №17

Цель: На конкретных примерах научиться решать дифференциальные уравнения первого порядка

Задание 1. Изучить теоретические сведения

<u>**Теоретические сведения**</u>

<u>*Определение.*</u> Дифференциальное уравнение вида $y' = f(x, y)$ называется **однородным**, если его правая часть f(x, y) есть однородная функция нулевого измерения относительно своих аргументов.

Любое уравнение вида $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ является однородным, если функции *P(x, y)* и *Q(x, y)* – однородные функции одинакового измерения.

<u>*Определение.*</u> Дифференциальное уравнение называется **линейным** относительно неизвестной функции и ее производной, если оно может быть записано в виде:

$$y' + P(x)y = Q(x),$$

при этом, если правая часть *Q(x)* равна нулю, то такое уравнение называется **линейным однородным** дифференциальным уравнением, если правая часть *Q(x)* не равна нулю, то такое уравнение называется **линейным неоднородным** дифференциальным уравнением.

P(x) и *Q(x)*- функции непрерывные на некотором промежутке a < x < b.

<u>*Пример.*</u> Решить уравнение $y' = \frac{y}{x}\left(\ln\frac{y}{x} + 1\right)$.

Введем вспомогательную функцию *u*. $u = \frac{y}{x}$; $y = ux$; $y' = u'x + u$.

Отметим, что введенная нами функция *u* всегда положительна, т.к. в противном случае теряет смысл исходное дифференциальное уравнение, содержащее $\ln u = \ln\frac{y}{x}$.

Подставляем в исходное уравнение: $u'x + u = u(\ln u + 1)$; $u'x + u = u\ln u + u$; $u'x = u\ln u$;

Разделяем переменные: $\frac{du}{u\ln u} = \frac{dx}{x}$; $\int\frac{du}{u\ln u} = \int\frac{dx}{x}$;

Интегрируя, получаем: $\ln|\ln u| = \ln|x| + C$; $\ln u = Cx$; $u = e^{Cx}$;

Переходя от вспомогательной функции обратно к функции у, получаем общее решение: $y = xe^{Cx}$.

Задание 2. Решить задачи с учебника:

Григорьев В.П. Элементы высшей математики: учебник для студ.учреждений сред. проф. образования/ В.П. Григорьев, Ю.А. Дубинский. – 4-е изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия», 2008. – стр. 205, задача 1,2

Итог работы: решение задач, защита

Практическая работа №18, 19

Цель: На конкретных примерах решать дифференциальные уравнения второго порядка

Задание 1. Изучить теоретические сведения

<u>Теоретические сведения</u>

<u>Пример.</u> Решить уравнение $y'' - 4y' + 4y = 0.$

Характеристическое уравнение: $k^2 - 4k + 4 = 0;\quad k_1 = k_2 = 2.$

Общее решение: $\boxed{y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}.}$

<u>Пример.</u> Решить уравнение $y'' + 2y' + 5y = 0.$

Характеристическое уравнение: $k^2 + 2k + 5 = 0;\quad D = -16;\quad k_1 = -1 + 2i;$
$k_2 = -1 - 2i.$

Общее решение: $\boxed{y = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x).}$

Задание 2. Решить задачи:

I вариант:	I I вариант:	I I I вариант:
Решите уравнения 2^го^ порядка		
а) $y'' - 7y' + 12y = 0$ **б)** $y'' - 4y' + 5y = 0$	**а)** $y'' - 3y' - 10y = 0$ **б)** $y'' + 2y' + 3y = 0$	**а)** $y'' - 8y' + 15y = 0$ **б)** $y'' + 4y' + 12y = 0$

Итог работы: решение задач, защита

Практическая работа №20

Цель:

1. рассмотреть анализ теории комплексных чисел
2. научиться решать задачи с использованием комплексных чисел

Задание 1. Изучить теоретические сведения

Теоретические сведения

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Комплексным числом называется число вида $z = x + iy$, где x и y действительные числа, а i – мнимая единица такая, что $i^2 = -1$.

При этом такая запись комплексного числа называется алгебраической; $x = \mathrm{Re}\,(z)$ является действительной частью комплексного числа, а $y = \mathrm{Im}\,(z)$ – мнимою. Каждое комплексное число может быть так же представлено в тригонометрической форме

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

или показательной форме:

$$z = re^{i\varphi}$$

где $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ – модуль комплексного числа, а $\varphi = \arg z$ – аргумент комплексного числа такой, что $\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{y}{x}$, где $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ или $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

Комплексные числа изображаются на комплексной плоскости. Для них введены операции сложения, умножения, вычитания и деления. Так же их можно возводить в степень и извлекать из них корень, для этого используют формулу Муавра.

Задание 2. Решить следующие задачи:

1. Представить в показательной и тригонометрической формах комплексное число $z = 2 - 2i$
2. Найти разность и сумму комплексных чисел $z_1 = 1 + i$ и $z_2 = 2 - 3i$.
3. Найти произведение и частное чисел $z_1 = 4 + 5i$ и $z_2 = 1 - i$.

Итог работы: решение задач, защита

Практическая работа №21

Цель: научиться решать задачи с использованием приближенные числа.

Задание 1. Решить следующие задачи

1. Найти сумму приближённых чисел $23{,}44 + 0{,}263 + 445$, все знаки которых верны, и указать её абсолютную и относительную погрешности.
2. Сторона квадрата равна $3{,}07\text{м} \pm 0{,}02\text{м}$. Вычислить площадь квадрата, округлив результат до верных знаков.
3. Определить количество верных значащих цифр в следующих числах:

$$x_1^\bullet = 0{,}2365, \quad если \quad \Delta_{x_1^\bullet} = 0{,}2 \cdot 10^{-1}$$

$$x_1^\bullet = 426{,}75, \quad если \quad \Delta_{x_2^\bullet} = 0{,}32 \cdot 10^{-4}$$

Задание 2. Используя сеть Интернет ответить на следующие вопросы (ответы запишите в тетрадь):

1. Укажите основные источники погрешности при численном решении задач и дайте классификацию погрешностей.
2. Определите абсолютную и относительную погрешности числа, верные значащие цифры числа.
3. Сформулируйте прямую и обратную задачу теории погрешностей.
4. Что происходит с абсолютными погрешностями при сложении и вычитании чисел?
5. Чему равны относительные погрешности при умножении и делении чисел?
6. В чем смысл принципа равных влияний?
7. Сформулируйте определение корректности постановки задачи.
8. Введите понятие вычислительной погрешности (погрешности округления).

Итог работы: решение задач, защита

Практическая работа №22

Цель: рассмотреть анализ приближенного вычисления определенных интегралов

Задание 1. Ознакомьтесь с теоретической частью

Теоретическая часть

Приближенное вычисление определенных интегралов

При решении физических и технических задач приходится находить определенные интегралы от функций, первообразные которых не выражаются через элементарные функции. Это привело к необходимости вывода приближенных формул вычисления определенных интегралов. Познакомимся с двумя из них: *формулой трапеций и формулой парабол.*

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{f(x_0)+f(x_1)}{2}(x_1-x_2)+\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}(x_2-x_1)+\ldots+\frac{f(x_{n-1})+f(x_n)}{2}(x_n-x_{n-1})=$$
$$=\frac{b-a}{2n}\left\{f(a)+f(b)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)\right\},$$

1. Формула трапеций.

Пусть требуется вычислить интеграл $\int_a^b f(x)dx$, где f(x) - непрерывная функция. Для простоты рассуждений ограничимся случаем, когда f(x)³0. Разобьем отрезок [a, b] на n отрезков точками $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{k-1}<x_k<\ldots<x_n=b$ и с помощью прямых $x=x_k$ построим n прямолинейных трапеций (эти трапеции заштрихованы на рис. 1). Сумма площадей трапеций приближенно равна площади криволинейной трапеции, т.е.

Где $f(x_{k-1})$ и $f(x_k)$ - соответственно основания трапеций; $x_k - x_{k-1} = (b-a)/n$ - их высоты.

Таким образом, получена приближенная формула

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2n}\left\{f(a)+f(b)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)\right\},$$

которая и называется *формулой трапеций*. Эта формула тем точнее, чем больше n.

Рассмотрим в качестве примера интеграл $\int_0^1 x^2dx$. Точное значение этого интеграла находится просто:

$$\int_0^1 x^2dx=\frac{x^3}{3}\bigg|_0^1=\frac{1}{3}=0{,}3333\ldots$$

Задание 2. Решить следующие задачи:

1. Вычислить по формуле трапеции интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ при n=10.
2. **Вычислить приближенно интеграл по формулам прямоугольников, трапеций, Симпсона и оценить их погрешности:** $\int_2^6 \frac{dx}{\ln x}$.

Итог работы: решение задач, защита

Практическая работа №23

Цель: Произвести анализ числового метода.

Задание 1. Проведите анализ метода Эйлера (отчет напишите в тетради)

Содержание отчета:

1. Тема практического задания
2. Цель работы
3. Теоретические сведения
4. Анализ задачи (решение задачи рассмотреть методом Эйлера)
5. Вывод

Итог работы: отчет, защита

4. ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

Основные:

О-1 Григорьев В.П., Дубинсий Ю.А. Элементы высшей математики: Учебник / Григорьев В.П., Дубинсий Ю.А. – М.: ИЦ Академия, 2019. – 256 с.

О-2 Комогорцев В.Ф. Высшая математика: Учебник / В.Ф. Комогорцев - Брянск: Изд-во Брянский ГАУ, 2018. – 259 с.

Дополнительные:

Д-1 Григорьев В.П., Дубинсий Ю.А. Элементы высшей математики: Учебник / Григорьев В.П., Дубинсий Ю.А. – М.: Форум, 2008 – 252 с.

Д-2 Боголомов Н.В. Практические занятия по математике: Учебник / Боголомов Н.В. – М.: Высшая школа, 2000 – 283 с.

Электронные издания (электронные ресурсы):

1. *Григорьев В.П., Дубинсий Ю.А. Элементы высшей математики: Учебник / Григорьев В.П., Дубинсий Ю.А. – М.: ИЦ Академия, 2019. – 256 с.*
2. *Комогорцев В.Ф. Высшая математика: Учебник / В.Ф. Комогорцев - Брянск: Изд-во Брянский ГАУ, 2018. – 259 с. - ЭБС Академия;*
3. *www.school-collection.edu.ru – единая коллекции Цифровых образовательных ресурсов.*

5. ЛИСТ ИЗМЕНЕНИЙ И ДОПОЛНЕНИЙ, ВНЕСЕННЫХ В МЕТОДИЧЕСБИЕ УКАЗАНИЯ

№ изменения, дата внесения, № страницы с изменением	
Было	Стало
Основание: Подпись лица, внесшего изменения	