ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ИРКУТСКОЙ ОБЛАСТИ «ЧЕРЕМХОВСКИЙ ГОРНОТЕХНИЧЕСКИЙ КОЛЛЕДЖ ИМ. М.И. ЩАДОВА»

РАССМОТРЕНО
на заседании ЦК
«Информатики и ВТ»
Протокол №5
«09» января 2024 г.
Председатель: Чипиштанова Д.В.

УТВЕРЖДАЮ
Зам. директора по УР
О.В. Папанова
«22» февраля 2024 г.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

по практическим занятиям студентов

учебной дисциплине

ЕН.03 Теория вероятности и математическая статистика

09.02.07 Информационные системы и программирование

Разработал:
Литвинцева Е.А.

2024г.

СОДЕРЖАНИЕ

1.ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Методические указания по практическим занятиям учебной дисциплины **«Теория вероятности и математическая статистика»** составлены в соответствии с учебным планом и рабочей программой дисциплины «**Теория вероятности и математическая статистика**» по специальности ***09.02.07 Информационные системы и программирование.***

Цель проведения практических занятий: формирование практических умений, необходимых в последующей профессиональной и учебной деятельности.

Методические указания являются частью учебно-методического комплекса по учебной дисциплине «**Теория вероятности и математическая статистика**» и содержат:

- тему занятия (согласно тематическому плану учебной дисциплины);
- цель;
- оборудование (материалы, программное обеспечение, оснащение, раздаточный материал и др.);
- методические указания (изучить краткий теоретический материал по теме практического занятия);
- ход выполнения;
- форму отчета.

В результате выполнения полного объема практических занятий студент должен **уметь:**

– Применять стандартные методы и модели к решению вероятностных и статистических задач;

– Использовать расчетные формулы, графики при решении статистических задач;

– Применять современные пакеты прикладных программ многомерного статистического анализа.

– Применять современные пакеты прикладных программ при решении профессиональных задач.

При проведении практических работ применяются следующие технологии и методы обучения:

1. проблемно-поисковых технологий
2. тестовые технологии

1. Кабинет Теории вероятности и математической статистики должен быть оснащен проектором и экраном.

Оценка выполнения заданий практических занятий

1. **«Отлично»** - теоретическое содержание курса освоено полностью, без пробелов, умения сформированы, все предусмотренные программой учебные задания выполнены, качество их выполнения оценено высоко.
2. **«Хорошо»** - теоретическое содержание курса освоено полностью, без пробелов, некоторые умения сформированы недостаточно, все предусмотренные программой учебные задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками.
3. **«Удовлетворительно»** - теоретическое содержание курса освоено частично, но пробелы не носят существенного характера, необходимые умения работы с освоенным материалом в основном сформированы, большинство

предусмотренных программой обучения учебных заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки.

4. **«Неудовлетворительно»** - теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки.

В соответствии с учебным планом и рабочей программы дисциплины **«Теория вероятности и математическая статистика»** на практические (лабораторные) занятия отводится **28 часов.**

2. ПЕРЕЧЕНЬ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

№ п/п	Тема практических занятий	Количество часов
1	Подсчет числа комбинаций	2
2	Подсчет числа комбинаций	2
3	Вычисление вероятности события	2
4	Вычисление вероятности события	2
5	Вычисление вероятностей сложных событий	2
6	Вычисление вероятностей сложных событий	2
7	Построение закона распределения и функция распределения ДСВ.	2
8	Вычисление основных числовых характеристик ДСВ.	2
9	Построение функции распределения и плотности распределения	2
10	Вычисление характеристик НСВ	2
11	Вычисление вероятностей для нормального распределения	2
12	Использование расчетных формул, таблица, графиков при решении статистических задач. Построение по заданной выборке ее графической диаграммы, расчет числовых характеристик	2
13	Использование расчетных формул, таблица, графиков при решении статистических задач. Моделирование случайных величин, Моделирование сложных испытаний и их результатов	2
14	Применение современные пакеты прикладных программ многомерного статистического анализа	2

3.СОДЕРЖАНИЕ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

Практическое занятие № 1-2

Тема: подсчет числа комбинаций

Цель: получение практических навыков подсчета числа комбинаций

Оборудование: тетрадь, ручка

Методические указания: изучите теоретический материал, решить задачи по вариантам (номер варианта назначает преподаватель)

Ход выполнения:

Теоретический материал

Комбинаторика - раздел математики, в котором изучаются простейшие «соединения». Перестановки - соединения, которые можно составить из n предметов, меняя всеми возможными способами их порядок; число их Размещения - соединения, содержащие по m предметов из числа n данных, различающиеся либо порядком предметов, либо самими предметами; число их Сочетания - соединения, содержащие по m предметов из n, различающиеся друг от друга, по крайней мере, одним предметом

Решить комбинаторную задачу - это значит выписать все возможные комбинации, составленные из чисел, слов, предметов и др., отвечающих условию задачи.

Факториал

Определение. Произведение всех последовательных натуральных чисел от 1 до n обозначается n!

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n.$

Точные значения факториалов

Размещениями из n элементов по m называются такие соединения, которые отличаются друг от друга либо самими элементами, либо порядком их следования.

Сочетаниями из n элементов по m называются такие соединения, которые отличаются друг от друга хотя бы одним элементом.

Перестановками из n элементов называются такие соединения из n элементов, которые отличаются друг от друга лишь порядком следования элементов.

Порядок проведения работы:

1. Используя теоретические сведения, выполнить предложенное преподавателем задание.

2. Соответствующим образом оформить работу

$$\tilde{A}_n^m = n^m$$

Перестановки

Перестановками из **n** элементов называются размещения из этих n элементов по **n** (Перестановки - частный случай размещений).

Число перестановок без повторений (n различных элементов) вычисляется по формуле:

$$P_n = n(n-1) \ldots 1 = n!$$

Число перестановок с повторениями (k различных элементов, где элементы могут повторяться $m_1, m_2, \ldots, m_k$ раз и $m_1 + m_2 + \ldots + m_k = n$, где n - общее количество элементов) вычисляется по формуле:

$$P_n(m_1, m_2, \ldots, m_k) = \frac{n!}{m_1! \cdot m_2! \cdot \ldots \cdot m_k!}.$$

Правило суммы.

Если элемент a можно выбрать m способами, а элемент b – n способами, причем любой выбор элемента a отличен от любого выбора элемента b, то выбор “a или b” можно сделать m + n способами.

Правило произведения.

Если из некоторого множества А элемент a_i можно выбрать K_A способами, а элемент b_j из множества В – K_B способами, то совокупность (a_i ;b_j) можно образовать $K_A * K_B$ способами. Правило верно и для совокупностей, состоящих из большего, чем два числа элементов.

Перестановки с повторением.

Иногда требуется переставлять предметы, некоторые из которых неотличимы друг от друга. Рассмотрим такой вариант перестановок, который называется перестановками с повторениями. Пусть имеется n_1 предметов 1-го типа, n_2 предмета 2-го, n_k предметов k-го типа и при этом $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$. Количество разных перестановок предметов

$$P(n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k) = \frac{n!}{(n_1! n_2! n_3! \ldots n_k!)}$$

Размещения с повторениями.

Пусть даны элементы a_1 ,a_2 , . . . ,a_n (a)

Размещением с повторениями из n элементов по k элементов называется всякая упорядоченная последовательность из k элементов, членами которой являются данные элементы. В размещении с повторениями один и тот же элемент может находиться на нескольких различных местах.

Формула для числа размещений с повторениями.

Каждый элемент может быть выбран n способами, поэтому :

$\overline{\mathbf{A}}_n^k = \mathbf{n}^k$,где $\overline{\mathbf{A}}_n^k$ -обозначение размещений с повторениями .

Задание 1. Вычислите

1.Вычислить $\frac{6!-4!}{3!}$

2. Вычислить $\frac{5!3!}{6!}$

3.Упростить $\frac{(n-1)!}{(n+2)!}$

4. Упростить $\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}$

5.Вычислить $\frac{P_6-P_5}{P_4}$

6.Вычислить A_8^4

7. Вычислить C_{10}^4

8. Сколько слов можно получить, переставляя буквы в слове «солнце», «молоко»?

9.Сколько двузначных чисел можно составить из цифр 1,2,3,8,9 так, чтобы в каждом числе не было одинаковых цифр?

10. Учащиеся изучают 12. Предметов. Сколькими способами можно составить расписание уроков на один день так, чтобы 6 уроков были различными?

11. Сколькими способами можно составить дежурство по классу по 4 человека, если в классе 28 человек?

12.Решить уравнение $C_{x-2}^2=21$

Задание 2. Решите задачи

Вариант 1

1. Сколькими способами можно составить расписание одного учебного дня из 5 различных уроков?
2. На 1 курсе 12 учащихся, имеющих по математике оценки «4-5». Сколькими способами можно сформировать команду из 4 человек для участия в математической олимпиаде?
3. Сколько существует различных двузначных чисел, в записи которых можно использовать цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6, если цифры в числе должны быть различными?

Вариант 2

1. Сколько различных пятизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5?
2. Имеются помидоры, огурцы, лук. Сколько различных салатов можно приготовить, если в каждый салат должно входить 2 различных вида овощей?
3. Сколькими способами из 8 учебных предметов можно составить расписание учебного дня из 4 различных уроков.

Задание 3: решите задачи

1. Сколько существует двузначных чисел, которые записываются различными цифрами?
2. Сколькими способами из отряда в 20 человек можно выбрать командира и знаменосца?
3. Сколькими различными способами можно построить в шеренгу 5 человек?
4. Сколько различных двузначных чисел можно записать, используя цифры 3,4, 5 и 6? Сколько различных двузначных чисел можно записать, используя при записи числа каждую из указанных цифр только один раз? Запишите эти числа.
5. Сколько трехзначных чисел можно составить из трех различных, не равных нулю цифр? Зависит ли результат от того, какие цифры взяты? Укажите какой-нибудь способ перебора трехзначных чисел, при котором ни одно число не может быть пропущено.

Форма отчета: отчетная работа

Практическое занятие №3

Тема: вычисление вероятности события

Цель: научить вычислять вероятности событий

Оборудование: тетрадь, ручка

Методические указания: изучите теоретический материал, решить задачи по вариантам (номер варианта назначает преподаватель)

Ход выполнения:

Теоретический материал

Классическое определение вероятности

Пусть некоторый опыт может приводить лишь к одному из конечного множества результатов. Эти результаты будем называть элементарными исходами. Предположим, что элементарные исходы удовлетворяют следующим условиям:

1) образуют полную группу, т.е. в каждом испытании обязан появиться какой-нибудь из этих исходов;
2) попарно несовместны, т.е. два различных элементарных исхода не могут появиться в одном испытании;
3) равновозможные, т.е. шансы на появление у всех элементарных исходов одинаковы.

В этих условиях может использоваться классическое определение вероятности.

Определение: Элементарные исходы, в которых появляются интересующее нас событие, называются *благоприятными* этому событию.

Определение: *Вероятностью события А* называются число Р(А), равное отношению числа исходов испытания, благоприятствующих событию А к общему числу исходов:

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

где n –общее число исходов испытания, m –число исходов, благоприятствующих событию А.

Задание 1: решите задачи

Вариант 1

1. Из ящика, в котором 10 белых и 6 черных шаров, берут наудачу 3 шара. Какова вероятность того, что один из них белый, а два черных?
2. Собрание, на котором присутствуют 20 мужчин и 10 женщин, выбирают делегацию из четырех человек. Каждый может быть избран с равной вероятностью. Найти вероятность того, что в делегацию войдут 3 женщины?
3. Набирая номер телефона, абонент забыл три последние цифры, запомнив лишь, что они различные, набрал их наудачу. Найти вероятность того, что набраны нужные цифры?
4. 25 экзаменационных билетов содержат по две вопроса, которые не повторяются. Студент подготовил 45 вопросов. Какова вероятность того, что вытянутый студентом билет состоит из подготовленных им вопросов?
5. В мастерскую для ремонта поступило 15 телевизоров. Известно, что 6 из них нуждаются в общей регулировке. Мастер берет первые попавшиеся 5 телевизоров. Какова вероятность того, что 2 из них нуждаются в общей регулировке.

Вариант 2

1. Какова вероятность, что четырехзначный номер случайно взятого автомобиля в большом городе имеет все цифры различные?
2. Трехзначное число образовано случайным выбором трех неповторяющихся цифр из цифр 1, 2, 3, 4, 5. Какова вероятность того, что это число четное?
3. Среди 17 студентов группы, из которых 8 девушек, разыгрывается 7 пригласительных билетов. Какова вероятность того, что среди обладателей билетов окажутся 4 девушки?

4. Подлежат контролю 250 изделий, из которых 5 нестандартных. Какова вероятность того, что среди наудачу взятых для контроля 2-х изделий, одно окажется нестандартным?
5. У сборщика 10 деталей, из которых 4 одного типа, а 6 другого. Какова вероятность того, что взятые наудачу две детали окажутся разного типа?

Вариант 3

1. Партия состоит из 20 радиоприемников, из которых 5 неисправных. Для проверки отбираются три радиоприемника. Какова вероятность того, что среди них один неисправный, а две исправных?
2. В корзине находятся 5 красных и 4 синих мяча. Из корзины наудачу вынимают два мяча. Какова вероятность того, что они оба окажутся красными?
3. Из тридцати карточек с буквами русского алфавита наугад выбирают 4. Какова вероятность, сто эти карточки в порядке выхода составят слово «небо»?
4. Участник лотереи «Спортлото 5 из 36» отметил на карточке цифры 4, 12, 20, 31, 33. Найти вероятность того, что он угадал четыре цифры?
5. В круг вписан квадрат. Найти вероятность того, что точка, брошенная наудачу в круг, окажется внутри квадрата.

Вариант 4

1. Отрезок разделен на три равные части. На этот отрезок наудачу брошены три точки. Найти вероятность того, что на каждую из трех частей отрезка попадает по одной точке.
2. Из ящика, в котором 8 белых и 4 черных шаров, берут наудачу 3 шара. Какова вероятность того, что два из них белые, а один черный?
3. Из колоды в 52 карты берется наугад 4 карты. Найти вероятность того, что среди этих 4 карт будут представлены все четыре масти.
4. На полке в случайном порядке расставлено 40 книг, среди них находится трехтомник А.С.Пушкина. Некто взял наудачу с полки 5 книг. Найти вероятность того, что среди этих пяти книг есть трехтомник Пушкина.
5. Секретных замок содержит на общей оси 4 диска, каждый из которых разделен на 5 секторов с различными цифрами. Замок открывается только в том случае, если диски установлены так, что образуют определенное число. Найти вероятность того, что при произвольной установке дисков замок откроется.

Форма отчета: отчетная работа

Практическое занятие №4

Тема: вычисление вероятности события

Цель: научить вычислять вероятности событий

Оборудование: тетрадь, ручка

Методические указания: изучите теоретический материал, решить задачи по вариантам (номер варианта назначает преподаватель)

Ход выполнения:

Теоретический материал

Теорема умножения вероятностей

Теорема: *Вероятность произведения двух независимых событий* равна произведению вероятностей этих событий

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B).$$

Теорема: *Вероятность произведения двух зависимых событий* равна произведению вероятностей одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предложении, что первое уже наступило.

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B | A).$$

Теорема сложения вероятностей несовместимых событий

Теорема: *Вероятность суммы несовместных событий* равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A+B) = P(A)+P(B).$$

Теорема: **Если A и B – совместные события, *то***

$$P(A+B) = P(A)+P(B)-P(A \cdot B).$$

Вероятность противоположного события

Несколько событий в данном опыте образуют полную группу, если в результате опыта обязательно должно появиться *хотя бы одно из этих событий*, Отсюда следует, что сумма событий полной группы есть достоверное событие, вероятность которого равна единице.

Теорема: Два противоположных друг другу события образуют полную группу:

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1.$$

Пример: Студент разыскивает нужную ему формулу в трех справочниках. Вероятность того, что формула содержится в 1-м, 2-м и 3-м справочниках, соответственно равна 0,6; 0,7; 0,8. Найти вероятность того, что формула содержится:

а) только в одном справочнике;
б) только в двух справочниках;
в) во всех трех справочниках;
г) хотя бы в одном справочнике;
д) ни в одном справочнике.

Решение

Рассмотрим элементарные события и их вероятности:

A_1 – формула находится в 1-м справочнике, $P(A_1) = 0{,}6$, $P(\overline{A_1}) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$;

A_2 – формула находится во 2-м справочнике, $P(A_2) = 0{,}7$, $P(\overline{A_2}) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$;

A_3 – формула находится в 3-м справочнике, $P(A_3) = 0{,}8$, $P(\overline{A_3}) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$.

Выразим через элементарные события и их отрицания все события а) – д) и применим теоремы сложения и умножения вероятностей:

а) Пусть событие A – формула содержится только в одном справочнике:

$$A = A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3} + \overline{A_1} \cdot A_2 \cdot \overline{A_3} + \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot A_3,$$

$$P(A) = P(A_1) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(\overline{A_3}) + P(\overline{A_1}) \cdot P(A_2) \cdot P(\overline{A_3}) + P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(A_3) =$$

$$= 0{,}6 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}2 + 0{,}4 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}2 + 0{,}4 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}8 = 0{,}188.$$

б) Пусть событие B – формула содержится только в двух справочниках:

$$B = A_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A_3} + A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot A_3 + \overline{A_1} \cdot A_2 \cdot A_3.$$

Далее аналогично пункту а) получим, что

$$P(B) = 0{,}6 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}2 + 0{,}6 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}8 + 0{,}4 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0{,}452.$$

в) Пусть событие C – формула содержится во всех трех справочниках: $C = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$,

$$P(C) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = 0{,}6 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0{,}336.$$

г) Пусть событие D – формула не содержится ни в одном справочнике: $D = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}$,

$$P(D) = P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(\overline{A_3}) = 0{,}4 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}2 = 0{,}024.$$

д) Пусть событие E – формула содержится хотя бы в одном справочнике:

$$E = A_1 + A_2 + A_3.$$

Для вычисления вероятности события E удобно воспользоваться формулой:

$$P(E) = P(A_1 + A_2 + A_3) = 1 - P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(\overline{A_3}) = 1 - 0{,}4 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}2 = 0{,}976.$$

Вариант 1

1. Покупатель может приобрести акции трех компаний: *A*, *B* и *C*. Надежность первой оценивается экспертами на уровне 90 %, второй – 85 % и третьей – 91 %. Чему равна вероятность того, что а) только одна компания в течение года станет банкротом; б) по крайней мере две компании обанкротятся?
2. Рабочий обслуживает три станка, работающих независимо друг от друга. Вероятность того, что за смену первый станок не потребует внимания рабочего, равна 0,9, второй – 0,8, третий – 0,75. Найти вероятность того, что за смену: а) только третий станок потребует внимания; б) хотя бы один станок потребует внимания рабочего.
3. В магазин вошли три покупателя. Вероятность того, что каждый что-нибудь купит, равна 0,3. Найти вероятность того, что: а) два из них совершат покупки; б) ни один не совершит покупок; в) по крайней мере два совершат покупки.
4. Радист трижды вызывает корреспондента. Вероятность того, что будет принят первый вызов, равна 0,2, второй – 0,3, третий – 0,4. Найти вероятность того, что корреспондент услышит вызов радиста.
5. Найти вероятность того, что откажут два из четырех независимо работающих элементов вычислительного устройства, если вероятности отказа первого, второго, третьего и четвертого элемента соответственно равны 0,4; 0,3; 0,4; 0,2.

Вариант 2

1. Вероятность получить высокие дивиденды по акциям на первом предприятии – 0,2, на втором – 0,35, на третьем – 0,15. Определить вероятность того, что акционер, имеющий акции всех предприятий, получит высокие дивиденды: а) на всех предприятиях; б) только на одном предприятии; в) хотя бы на оном предприятии.
2. Вероятность потери письма в почтовом отделении равна 0,03, а телеграммы – 0,01. Отправлено два письма и одна телеграмма. Какова вероятность того, что дойдет: а) только телеграмма; б) хотя бы одно из отправлений?
3. Покупатель может приобрести акции трех компаний: *A*, *B* и *C*. Надежность первой оценивается экспертами на уровне 81 %, второй – 92 % и третьей – 86 %. Чему равна вероятность того, что а) две компании обанкротятся; б) наступит хотя бы одно банкротство?
4. Рабочий обслуживает три станка, работающих независимо друг от друга. Вероятность безотказной работы первого из них равна 0,75, второго – 0,85, третьего – 0,95. Найти вероятность того, что: а) откажут два станка; б) все три станка будут работать безотказно; в) хотя бы один станок откажет в работе.
5. Экзаменационный билет содержит три вопроса. Вероятность того, что студент ответит на первый и второй вопросы, равна 0,9, на третий – 0,8. Найти вероятность того, что студент сдаст экзамен, если для этого необходимо ответить: а) на все вопросы; б) по крайней мере на два вопроса билета.

Вариант 3

1. Агрегат имеет четыре двигателя и способен функционировать, если работают по крайней мере два из них. Вероятность выйти из строя первому двигателю – 0,01; второму – 0,02; третьему – 0,03 и четвертому – 0,04. Какова вероятность выйти из строя агрегату?
2. Предприятием послана автомашина за различными материалами на четыре базы. Вероятность наличия нужного материала на первой базе равна 0,9, на второй – 0,95, на третьей – 0,8, на четвертой – 0,6. Найти вероятность того, что только на одной базе не окажется нужного материала.
3. В магазин вошли три покупателя. Вероятность того, что каждый что-нибудь купит, равна 0,3. Найти вероятность того, что: а) все три покупателя совершат покупки; б) только один из них купит товар; в) хотя бы один купит товар.
4. На спортивных соревнованиях вероятность показать рекордный результат для первого спортсмена – 0,5, для второго – 0,3, для третьего – 0,1. Какова вероятность того, что: а) рекорд будет установлен одним спортсменом; б) рекорд будет установлен хотя бы одним спортсменом; в) рекорд не будет установлен.
5. Три орудия стреляют в цель независимо друг от друга. Вероятность попадания в цель каждого равна 0,7. Найти вероятность попадания в цель: а) только одного из орудий; б) хотя бы одного орудия.

Вариант 4

1. Станция метрополитена оборудована тремя независимо работающими эскалаторами. Вероятность безотказной работы в течение дня для первого эскалатора равна 0,9, для второго – 0,95, для третьего – 0,85. Найти вероятность того, что в течение дня произойдет поломка не более одного эскалатора.
2. Произведен залп по цели из трех орудий. Вероятности попадания в цель из каждого орудия соответственно равны 0,6, 0,7, 0,8. Найти вероятность поражения цели: а) хотя бы один раз; б) только один раз.
3. Рабочий обслуживает три станка, работающих независимо друг от друга. Вероятность того, что за смену первый станок не потребует внимания рабочего, равна 0,9, второй – 0,8, третий – 0,75. Найти вероятность того, что за смену: а) только один станок потребует внимания; б) не более двух станков потребуют внимания рабочего.
4. Три студента сдают экзамен. Вероятность того, что отдельный студент сдаст экзамен на «отлично», равна для первого студента 0,7, для второго – 0,6, для третьего – 0,2. Какова вероятность того, что экзамен будет сдан на «отлично»: а) двумя студентами; б) хотя бы одним; в) ни одним?
5. По мишени производятся три независимых выстрела. Вероятности попадания при первом, втором и третьем выстрелах равны соответственно 0,4, 0,5, 0,7. Какова вероятность того, что в мишень произойдет ровно одно попадание?

Форма отчета: отчетная работа

Практическое занятие №5, 6

Тема: вычисление вероятности сложных событий

Цель: отработать навыки по вычислению вероятностей сложных событий

Оборудование: тетрадь, ручка

Методические указания: изучите теоретический материал, решить задачи по вариантам (номер варианта назначает преподаватель)

Ход выполнения:

Теоретический материал

1. Формула полной вероятности

Пусть событие А происходит совместно с одним из событий (гипотез) $H_1, H_2, \dots H_n$, которые образуют полную группу событий. Тогда справедлива *формула полной вероятности события А :*

$$P(A) = \sum_{\kappa=1}^{n} P(H_\kappa)\cdot P(A|H_\kappa),$$

где $P(H_к)$ – вероятность гипотезы $H_к$, $P(A|H_к)$ – условная вероятность A, т.е. вероятность появления события A при условии, что произошла гипотеза $H_к$.

2. Формула Байеса

Пусть вероятности гипотез до опыта были $P(H_1)$, $P(H_2)$,… $P(H_n)$. В результате опыта появилось событие A . Тогда условная вероятность $P(H_к|A)$ гипотезы $H_к$ с учетом появления события A вычисляется по *формуле Байеса:*

$$P(H_\kappa|A) = \frac{P(H_\kappa)\cdot P(A|H_\kappa)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)\cdot P(A|H_i)} = \frac{P(H_\kappa)\cdot P(A|H_\kappa)}{P(A)}.$$

Пример. На двух станках производят одинаковые детали, которые поступают на конвейер. Производительность первого станка в три раза больше производительности второго. Первый станок дает в среднем 80% деталей отличного качества, а второй –90%. Наудачу взятая с конвейера деталь оказалась отличного качества. Найти вероятность того , что она изготовлена на втором станке.

Решение Пусть событие A - взятая наудачу с конвейера деталь отличного качества.

Гипотезы:

H_1- деталь изготовлена на первом станке;

H_2- деталь изготовлена на втором станке.

Вероятность гипотез до появления события A:

$P(H_1)=3/4$; $P(H_2)=1/4$.

Условные вероятности

$$P(A|H_1) = \frac{80\%}{100\%} = 0{,}8; \qquad P(A|H_2) = \frac{90\%}{100\%} = 0{,}9.$$

Вероятности того, что взятая наудачу с конвейера деталь окажется отличного качества, т.е. вероятность события A, вычисляется по формуле полной вероятности:

$$P(A) = \frac{3}{4}\,0{,}8 + \frac{1}{4}\,0{,}9 = 0{,}825.$$

Искомая вероятность того, что взятая деталь отличного качества изготовлена на втором станке, вычисляется по формуле Байеса: $P(H_2|A) = \dfrac{P(H_2)\cdot P(A|H_2)}{P(A)} = \dfrac{\frac{1}{4}\,0{,}9}{0{,}825} \approx 0{,}273.$

3. Схема Бернулли. Формула Бернулли

Пусть производится n независимых однотипных испытаний, в каждом из которых событие A может появиться с вероятностью P. Тогда вероятность непоявления события A, т.е. $P(\overline{A})$ равна q=1-p.

Вероятность того, что событие A произойдет в этих n независимых испытаниях ровно k раз, можно вычислить по **формуле Бернулли**

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

Для определения вероятности появления события A менее m раз ($k < m$), более m раз ($k > m$), хотя бы один раз ($k \ge 1$) и т. п. могут быть использованы формулы:

$$P_n(k<m)=P_n(0)+P_n(1)+...+P_n(m-1),$$
$$P_n(k>m)=P_n(m+1)+P_n(m+2)+...+P_n(n),$$
$$P_n(k\geq 1)=1-q^n.$$

Пример . Всхожесть семян данного растения равна 90 %. Найти вероятность того, что из четырех посеянных семян взойдут: а) три; б) не менее трех.

Решение

а) Искомую вероятность находим с помощью формулы Бернулли (14), учитывая что $n=4$, $k=3$, $p=0{,}9$, $q=1-p=0{,}1$.

$P_4(3)=C_4^3(0{,}9)^3(0{,}1)^1=4\cdot 0{,}729\cdot 0{,}1=0{,}2916$.

б) «Не менее трех» означает, что из четырех семян взойдут или три, или четыре. Так как эти события несовместны, то по теореме сложения искомая вероятность равна

$P_4(k\geq 3)=P_4(3)+P_4(4)=C_4^3(0{,}9)^3(0{,}1)^1+C_4^4(0{,}9)^4(0{,}1)^0=0{,}2916+0{,}6561=0{,}9477$.

4. Предельные теоремы для схемы Бернулли

Теорема Пуассона. (Отметим, что на практике эта теорема применяется при $\lambda_n<10$. Это означает, что p должно быть очень малым числом). *Пусть имеется n независимых испытаний с вероятностью p успеха в одном испытании и q- вероятностью неудачи. Тогда для любого фиксированного m справедливо соотношение*

$$P_n^m=\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}\text{, где } \lambda=np,$$

Пример. Машинистка печатает текст, который содержит *20000* знаков. Каждый знак может быть напечатан неправильно с вероятностью *0.0004*. Какова вероятность того, что в тексте не менее *3* опечаток?

Решение. Если опечатку считать успехом, то к этой задаче применима схема Бернулли при $p=0.0004$, $n=20000$. Поскольку $\lambda=np=8$, то можно использовать предельную теорему Пуассона. Поэтому, искомая вероятность равна $1-P_n^0-P_n^1-P_n^2=1-e^{-8}-8e^{-8}-(64/2)e^{-8}=1-41e^{-8}=0.986$.

Интегральная теорема Муавра-Лапласа. *Пусть имеется n независимых испытаний с вероятностью успеха p, $0<p<1$, в одном испытании и $q=1-p$ - вероятностью неудачи. Величина p не зависит от n. Тогда .для любых вещественных чисел a<b при* $n\to\infty$

$$P(a<\frac{m-np}{\sqrt{npq}}<b)=\Phi(b)-\Phi(a).$$

Здесь $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x}e^{-y^2/2}dy$ - функция Лапласа, значения которой заданы в таблицах.

Пример. При рождении ребенка вероятность рождения мальчика равна *0.512*. Найти вероятность того, что среди *1000* новорожденных мальчиков родится больше, чем девочек.

Решение. Пусть *A* – это событие, соответствующее вопросу задачи, *m* – это число рожденных мальчиков. Нетрудно видеть, что $P(A)=P(m>500)$. Поскольку $n=1000$ можно считать достаточно большим, то применим интегральную теорему Муавра-Лапласа, согласно которой

$$P(A)=P((\frac{m-np}{\sqrt{npq}}>\frac{500-512}{\sqrt{250}})=1-\Phi(-0.757)=1-(1-\Phi(0.757)=\Phi(0.757)=0.775.$$

Задание: решите задачи

Вариант 1

1. На каждом из трех станков изготовили по 100 однотипных деталей. Все детали сложили в один ящик. Известно, что продукция первого станка содержит в среднем 3% брака, а 2-го и 3-го станков по 2% брака. Найти вероятность того, что взятая наудачу из ящика деталь окажется набракованной.
2. Партия состоит из 70% вентиляторов рижского завода и 30% вентиляторов московского завода. Для вентилятора рижского завода вероятность, выдержать гарантийный срок равна 0,92, для вентиляторов московского завода эта вероятность равна 0,95. Наудачу взятый из партии вентилятор выдержал гарантийный срок. Найти вероятность того, что вентилятор московского завода.
3. На сборку поступило 1000 изделий с первого автомата, 2000 со второго и 2500 с третьего. Первый автомат дает 0,3% брака, второй – 0,4%, третий - 0,2%. Найти вероятность попадания на сборку бракованной детали.
4. В батарее из 10 орудий имеется одно непристрелянное. Вероятность попадания из него равна 0,25. Остальные орудия, пристрелянные с одинаковой вероятностью попадания равной 0,6. Произведен один выстрел, в результате чего цель поражена. Какова вероятность того, что выстрел сделан из непристрелянного орудия?
5. Что вероятнее: выиграть у равносильного противника не менее 3 партий из 4 или не менее 5 из 8?
6. В течение года за индивидуальной консультацией по математике обращаются в среднем 40 % студентов-первокурсников. Найти вероятность того, что в данном учебном году из 800 студентов этого курса за консультацией обратятся: а) 350 человек; б) не менее 340.

Вариант 2

1. Первый станок производит 45% всех болтов, а второй - 55%. В продукции первого станка брак составляет 2%, а в продукции второго - 3%. Какова вероятность, что случайно взятый болт окажется годным?
2. Противник применяет самолеты пяти типов. Известно, что на данном участке фронта сосредоточено примерно равное число самолетов каждого типа. Вероятности сбить самолет при проходе над оборонительной зоной соответственно равны для них 0,6; 0,3; 0,2; 0,1; 0,1. Самолет противника, прорывавшийся через оборонительную зону, сбит. Чему равна вероятность того, что это самолет первого типа?
3. В группе спортсменов 20 лыжников, 6 велосипедистов и 4 бегуна. Вероятность выполнить норму мастера спорта равна: для лыжника 0,9, для велосипедиста 0,8 и для бегуна 0,75. Найти вероятность того, что спортсмен, вызванный наудачу, выполнит норму мастера спорта.
4. На первом станке обрабатывается 80% всей продукции, а на втором – 20%. Первый станок дает 99% качественной продукции, а второй - 96%. Проверенное изделие оказалось бракованным. Какова вероятность того, что оно обрабатывалось на втором станке?
5. Каждое из 8 предприятий отрасли выполняет месячный план с вероятностью 0,9. Найти вероятность того, что в конце месяца план выполнят 6 предприятий.
6. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,9. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена: а) ровно 86 раз; б) более 90 раз.

Вариант 3

1. Прибор может работать в двух режимах. Нормальный режим наблюдается в 80% всех случаев, ненормальный - в 20%. Вероятность выхода прибора из строя за время

t в нормальном режиме равна 0,1, а в ненормальном - 0,7. Найти полную вероятность выхода из строя прибора за время t.

2. Среди поступающих на сборку деталей с первого автомата -1% бракованных, со второго автомата - 2%, с третьего - 2%, с четвертого - 3%. Производительности автоматов относятся, как 4:3:2:1 соответственно. Взятая наудачу деталь оказалась стандартной. Найти вероятность того, что её изготовил третий автомат.
3. Одинаковые детали изготовляются на трех станках: 25% на первом, 30% на втором и 45% на третьем. В продукции станков брак составляет соответственно 4%, 3%, 2%. Какова вероятность, что случайно взятая деталь окажется стандартной?
4. В монтажном цехе к устройству присоединяется электродвигатель. На складе имеются электродвигатели заводов №1, № 2 и №3 соответственно в количестве 19, 6 и 11 штук, которые могут безотказно работать до конца гарантийного срока соответственно с вероятностями 0,65, 0,76 и 0,71. Рабочий берет случайно электродвигатель и монтирует его к устройству. Найти вероятность того, что смонтированный и безотказно работающий до конца гарантийного срока электродвигатель поставлен заводом № I, 2 или 3.
5. Какова вероятность того, что при бросании семи игральных костей шестерка выпадет трижды?
6. Швейная фабрика выпускает в среднем 96 % продукции отличного ткачества. За смену сшито 150 костюмов. Найти вероятность того, что при проверке среди них окажутся отличного качества: а) 146 костюмов; б) не менее 146 костюмов.

Вариант 4

1. В первом ящике содержится 20 деталей, из них 15 стандартных, во втором - 30 деталей из них 24 стандартных, в третьем - 10 деталей, из них 6 стандартных. Найти вероятность того, что наудачу взятая деталь из произвольно выбранного ящика оказалась стандартной.
2. В магазин поступили заводные машины с трех фабрик: 150 машин с первой фабрики, 200 машин со 2-й и 250 машин с 3-й. Вероятность того, что игрушка 1-й фабрики не имеет брака, равна 0,7, для 2-й фабрики эта вероятность равна 0,8, а для 3-й - 0,9. Наудачу купленная в магазине машина оказалась бракованной. Какова вероятность того, что она изготовлена на 1-йфабрике?
3. Первый цех выпускает 80% продукции первым сортом, а второй цех – 85%. В ящике находится 20 изделий первого цеха и 10 изделий второго цеха. Какова вероятность того, что наудачу вынутое из ящика изделие окажется первосортным?
4. Получены три партии изделий одного образца. В первой партии - 20%бракованных изделий, а в двух других - десятая часть. Из произвольно выбранной партии извлечено бракованное изделие. Найти вероятность того, что оно извлечено из партии с наибольшим процентом брака.
5. Бросают 19 монет. Какое число выпавших гербов более вероятно: 10 или 9.
6. В среднем 35 % студентов сдают экзамен по математике на оценки «хорошо» и «отлично». Какова вероятность того, что из 100 человек, сдающих экзамен по математике, такие оценки получат: а) 42 человека; б) от 25 до 40 человек?

Форма отчета: отчетная работа

Практическое занятие № 7

Тема: построение закона распределения и функция распределения ДСВ.

Цель: отработать навыки по построению закона распределения и функции распределения ДСВ.

Оборудование: тетрадь, ручка

Методические указания: изучите теоретический материал, решить задачи по вариантам (номер варианта назначает преподаватель)

Ход выполнения:

Теоретический материал

Определение*: Случайной величиной* называется величина, которая в результате опыта примет одно и только одно возможное значение, при этом заранее неизвестно, какое именно.

Определение*: Дискретной* называют случайную величину, которая принимает отдельные, изолированные значения.

Определение*:* **Законом распределения** ДСВ называется соотношение между ее возможными значениями и их вероятностями (т. е. вероятностями, с которыми случайная величина принимает эти возможные значения).

Закон распределения может быть задан формулой (формулы Бернулли, Пуассона и др.), таблицей или графиком, а также функцией распределения.

x_i	x_1	x_2	...	x_n
P_i	p_1	p_2	...	p_n

называется **законом или рядом распределения дискретной случайной величины**.

Пример 1. Построить ряд распределения случайной величины ξ - числа выпадений орла при трех подбрасываниях монеты.

Решение. Случайная величина ξ может принять четыре различных значения: 0, 1, 2, 3. Найдем вероятности этих значений по формуле Бернулли:

$$x_1 = 0 \qquad P(X = x_1) = C_3^0 (1/2)^0 \cdot (1/2)^3 = 1/8$$

$$x_2 = 1 \qquad P(X = x_2) = C_3^1 (1/2)^1 \cdot (1/2)^2 = 3/8$$

$$x_3 = 2 \qquad P(X = x_3) = C_3^2 (1/2)^2 \cdot (1/2)^1 = 3/8$$

$$x_4 = 3 \qquad P(X = x_4) = C_3^3 (1/2)^3 \cdot (1/2)^0 = 1/8$$

Следовательно, ряд распределения:

X	***0***	***1***	***2***	***3***
P	***1/8***	***3/8***	***3/8***	***1/8***

Определение*:* **Функцией распределения** случайной величины X называется функция $F(x) = P(X < x)$, определяющая вероятность того, что случайная величина X примет значение, меньшее x.

Пример: Случайная величина X задана функцией распределения

x	1	2	3	4
p(x)	0,2	0,3	P_3	0,1

Найти вероятность p_3. Построить функцию распределения. Найти числовые характеристики с.в.

Решение:

Проверим тождество $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

$0{,}2+0{,}3+p_3+0{,}1=1$.

$p_3=0{,}4$.

Построим функцию распределения этой случайной величины.

Имеем:

при $x \le 1 \quad F(x) = P(X < x) = P(\varnothing) = 0;$

при $1 < x \le 2 \quad F(x) = P(X < x) = P(X = 1) = 0{,}2;$

при $2 < x \le 3 \quad F(x) = P(X < x) = P(X = 1, X = 2) = 0{,}2 + 0{,}3 = 0{,}5;$

при $3 < x \le 4 \quad F(x) = P(X < x) = P(X = 1, X = 2, X = 3) = 0{,}2 + 0{,}3 + 0{,}4 = 0{,}9;$

при $x > 4 \quad F(x) = P(X < x) = P(X = 1, X = 2, X = 3, X = 4) = 0{,}2 + 0{,}3 + 0{,}4 + 0{,}1 = 1.$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1; \\ 0.2, & 1 < x \le 2; \\ 0.5, & 2 < x \le 3; \\ 0.9, & 3 < x \le 4; \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

Задание: решите задачи

Вариант 1

1. Случайная величина подчиняется закону распределения

x	1	2	3	4	5
p(x)	0,1	0,3	0,15	P_4	0,2

Найти вероятность p_4. Построить функцию распределения.

2. Составить ряд распределения случайной величины – числа отказавших приборов за время испытания на надежность, если испытанию подвергалось 4 прибора, а вероятность отказа каждого равна 0,2.
3. Экзаменатор задает студенту не более четырех дополнительных вопросов. Вероятность того, что студент ответит на любой вопрос, равна 0,9. Преподаватель прекращает экзаменовать студента, как только студент обнаружит незнание заданного вопроса. Составить ряд распределения случайной величины - числа дополнительных вопросов, заданных студенту.
4. Случайные величины X и Y подчиняются законам распределения

x	1	2	3	4		y	0	1	2	3
p(x)	0,3	0,3	0,1	0,3		p(y)	0,3	0,3	0,2	0,2

Построить ряд распределения случайной величины X+Y.

Вариант 2

1. Случайная величина X задана функцией распределения

x	1	3	5	7	9
p(x)	0,25	0,1	P_3	P_4	0,2

Найти вероятности p_3, p_4, если $p_3=2p_4$.Построить функцию распределения.

2. Батарея состоит из трех орудий. Вероятности попадания в цель при одном выстреле из 1-го, 2-го, 3-го орудия равны соответственно 0,5; 0,6; 0,8. Каждое из орудий стреляет по некоторой цели один раз. Построить ряд распределения случайной величины числа попаданий в цель.
3. Шесть однотипных приборов испытывают на перегрузочных режимах. Вероятности для каждого прибора пройти испытание равны 0,7. Испытание заканчивается после выхода из строя первого же прибора. Построить ряд распределения числа произведенных испытаний
4. Случайные величины X и Y заданы функциями распределения

x	1	2	3	5		y	0	1	4	5
p(x)	0,2	0,4	0,2	0,2		p(y)	0,2	0,4	0,15	0,25

Построить функцию распределения случайной величины X+Y.

Вариант 3

1. Случайная величина X задана функцией распределения

x	2	4	6	8	10
p(x)	0,1	0,2	P_3	0,3	0,1

Найти вероятность p_3. Построить функцию распределения.

2. Партия, насчитывающая 20 изделий, содержит 5 бракованных. Из этой партии случайным образом взято 4 изделия. Требуется построить ряд распределения числа бракованных изделий, содержащихся в выборке.
3. Рабочий обслуживает 4 станка. Вероятность того, что в течение часа, станок не потребует внимания рабочего, равна для 1-го станка 0,7, для 2-го - 0,75, для 3-го - 0,8 и для 4-го - 0,9. Построить рад распределения случайной величины - числа станков, которые не потребуют внимания рабочего в течение часа.
4. Случайные величины X и Y заданы функциями распределения

x	0	1	3	4		y	1	2	4	5
p(x)	0,2	0,3	0,1	0,5		p(y)	0,1	0,4	0,2	0,3

Построить функцию распределения случайной величины X+Y.

Вариант 4

1. Случайная величина подчиняется закону распределения

x	3	6	9	12	15
p(x)	0,1	0,2	0,1	P_4	0,2

Найти вероятность p_4. Построить функцию распределения.

2. Испытывается устройство, состоящее из четырех независимо работающих приборов. Вероятности отказа приборов таковы: 0,3 ; 0,4 ; 0,5 ; 0,6. Составить ряд распределения числа отказавших приборов.
3. В цехе брак составляет 5% всех изделий. Составить ряд распределения числа бракованных изделий из трех взятых наудачу.
4. Случайные величины X и Y заданы функциями распределения

x	1	3	4	6		y	0	1	2	3
p(x)	0,2	0,2	0,3	0,3		p(y)	0,5	0,1	0,2	0,2

Построить функцию распределения случайной величины X+Y.

Форма отчета: отчет, защита работы.

Практическое занятие № 8

Тема: вычисление основных числовых характеристик ДСВ.

Цель: отработать навыки по вычислению основных числовых характеристик ДСВ.

Оборудование: тетрадь, ручка

Методические указания: изучите теоретический материал, решить задачи по вариантам (номер варианта назначает преподаватель)

Ход выполнения:

Теоретический материал

1. Математическое ожидание ДСВ

Определение: ***Математическое ожидание*** ДСВ находится по формуле:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

Вероятностный смысл этого выражения таков: при большом числе измерений среднее значение наблюдаемых значений величины X приближается к ее математическому ожиданию.

Механический смысл этого равенства заключается в следующем: математическое ожидание есть абсцисса центра тяжести системы материальных точек, абсциссы которых равны возможным значениям случайной величины, а массы - их вероятностям.

2. Дисперсия ДСВ

Определение: ***Дисперсия*** случайной величины X есть

$$D(X) = M((X - M(X))^2)$$

Дисперсию случайной величины X иногда удобнее вычислять по формуле

$$Д(X) = M(X)^2 - (M(X))^2.$$

<u>*Вероятностный смысл*</u> Дисперсия случайной величины X есть характеристика рассеивания разбросанности значений случайной величины около ее математического ожидания. Дисперсия случайной величины имеет размерность квадрата случайной величины.

3. Среднее квадратическое отклонение

Для более наглядной характеристики рассеивания удобнее пользоваться величиной, имеющей размерность самой случайной величины. Поэтому вводится понятие <u>среднего квадратического отклонения</u>: $\sigma(X) = \sqrt{Д(X)}$.

<u>Пример</u>: Случайная величина X задана функцией распределения

x	1	2	3	4
p(x)	0,2	0,3	P_3	0,1

Найти вероятность p_3. Найти числовые характеристики с.в.

РЕШЕНИЕ:

Проверим тождество $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

$0{,}2+0{,}3+p_3+0{,}1=1$.

$p_3=0{,}4$.

Найдем числовые характеристики случайной величины X:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

$M(X)=1\cdot 0{,}2+2\cdot 0{,}3+3\cdot 0{,}4+4\cdot 0{,}1=0{,}2+0{,}6+1{,}2+0{,}4=2{,}4$.

Для вычисления дисперсии применим формулу: $Д(X) = M(X^2) - (M(X))^2$.

$M(X^2)=1^2\cdot 0{,}2+2^2\cdot 0{,}3+3^2\cdot 0{,}4+4^2\cdot 0{,}1=0{,}2+1{,}2+3{,}6+1{,}6=6{,}6$.

$$Д(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = 6{,}6 - (2{,}4)^2 = 0{,}84.$$

$$\sigma(X) = \sqrt{Д(X)} = \sqrt{0{,}84} \approx 0{,}916.$$

Задание: решите задачи

Вариант 1

1. Случайная величина подчиняется закону распределения

x	1	2	3	4	5
p(x)	0,1	0,3	0,15	P_4	0,2

Найти вероятность p_4.Найти числовые характеристики с. в. X.

2. Вероятность изготовления нестандартной детали равна 0,1. Из партии контролер берет деталь для проверки на качество. Если она окажется нестандартной, партия задерживается. Если деталь окажется стандартной, то контролер берет следующую деталь. Всего проверяется не более пяти деталей. Вычислить числовые характеристики числа проверяемых деталей.
3. В благоприятном режиме устройство выдерживает три применения без регулировок, перед четвертым его приходится регулировать. В неблагоприятном режиме его приходится регулировать после первого же применения. Вероятность того, что устройство попадает в благоприятный режим, равна 0,7, в неблагоприятный - 0,3. Рассматривается случайная величина - число применений устройства до регулировки. Найти ее числовые характеристики.
4. По заданной функции распределения случайной величины найти ее числовые характеристики:

$$F(x)=\begin{cases}0 & при\ x\le -1,\\ 1/4 & при\ -1<x\le 2,\\ 3/4 & при\ 2<x\le 3,\\ 1 & при\ x>3.\end{cases}$$

Вариант 2

1. Случайная величина X задана функцией распределения

x	1	3	5	7	9
p(x)	0,25	0,1	P_3	P_4	0,2

Найти вероятности p_3, p_4, если $p_3=2p_4$. Найти числовые характеристики случайной величины X.

2. В устройстве, содержащем 6 радиоламп (все лампы различные), перегорела одна лампа. С целью устранения неисправности наудачу выбранную лампу заменяют заведомо годной из запасного комплекта, после чего сразу проверяют работу устройства. Составить ряд распределения числа замен ламп. Найти числовые характеристики этой случайной величины.
3. Испытывается надежность четырех приборов. Если очередной прибор не прошел испытание, то испытания прекращаются. Найти числовые характеристики случайного числа испытанных приборов, если вероятность выдержать испытание для каждого прибора, равна 0,9.
4. По заданной функции распределения случайной величины найти ее числовые характеристики:

$$F(x)=\begin{cases}0 & при\ x\le -3,\\ 1/3 & при\ -3<x\le 0,\\ 3/4 & при\ 0<x\le 2,\\ 1 & при\ x>2.\end{cases}$$

Вариант 3

1. Случайная величина X задана функцией распределения

x	2	4	6	8	10
p(x)	0,1	0,2	P_3	0,3	0,1

Найти вероятность p_3.Найти числовые характеристики с.в. X.

2. Вероятность изготовления нестандартной детали равна 0,1. Для проверки на качество ОТК берет из партии не более четырех деталей. При обнаружении нестандартной детали вся партия задерживается. Найти числовые характеристики числа подвергшихся проверке деталей.
3. Пять однотипных приборов испытываются при перегрузочных режимах. Вероятность пройти испытание для каждого прибора равна 0,85. Испытания заканчиваются после выхода из строя первого же прибора. Построить ряд распределения случайной величины- числа произведенных испытаний. Найти числовые характеристики.
4. По заданной функции распределения случайной величины найти ее числовые характеристики:

$$F(x)=\begin{cases}0 & при\ x\le -2,\\ 1/4 & при\ -2<x\le 1,\\ 1/2 & при\ 1<x\le 4,\\ 1 & при\ x>4.\end{cases}$$

Вариант 4

1. Случайная величина подчиняется закону распределения

x	3	6	9	12	15
p(x)	0,1	0,2	0,1	P_4	0,2

Найти вероятность p_4. Найти числовые характеристики с.в. X.

2. В нашем распоряжении четыре лампочки, каждая из которых имеет дефект с вероятностью 0,08. Для отбора одной годной лампочки каждая: лампочка ввинчивается в патрон. При включении тока дефектная лампочка сразу же перегорает. Построить ряд распределения случайной величины - числа лампочек, которое будет испробовано. Найти ее числовые характеристики.
3. В ящике семь изделий, одно из которых бракованное. Из ящика извлекают одно изделие за другим, пока не обнаружат брак. Найти числовые характеристики случайной величины - числа вынутых изделий.
4. По заданной функции распределения случайной величины найти ее числовые характеристики:

$$F(x)=\begin{cases}0 & при\ x\le -2,\\ 2/5 & при\ -2<x\le -1,\\ 4/5 & при\ -1<x\le 0,\\ 1 & при\ x>0.\end{cases}$$

Форма отчета: отчетная работа

Практическое занятие № 9

Тема: построение функции распределения и плотности распределения

Цель: отработать навыки построения функции плотности и интегральной функции распределения.

Оборудование: тетрадь, ручка

Методические указания: изучите теоретический материал, решить задачи по вариантам (номер варианта назначает преподаватель)

Ход выполнения:

Теоретический материал

Определение: Функция F(x) называется ***функцией распределения*** с.в.X или ***интегральной функцией***.

Например, значение функции F(x) при x=2 равно вероятности того, что с.в. X в результате испытания примет значение, меньшее двух, т.е. F(2)=P(X<2).

Определение: С. в. называется ***непрерывной (НСВ)***, если ее функция распределения F(x) является непрерывной функцией.

Свойства функции распределения:

1. F(x)- неубывающая функция;
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)=0$; $\lim\limits_{x\to\infty} F(x)=1$;
3. P(a≤X<в)= F(в)-F(a).

Определение: Функция f(x)= F′(x) называется ***плотностью распределения*** вероятностей НСВX.

Зная плотность распределения f(x), можно найти функцию распределения F(x) по формуле

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

Пример:

Дана плотность распределения случайной величины *X*:

$$f(x)=\begin{cases}0\ \ при\ \ x\le 0,\\ Ax^2\ \ при\ \ 0<x\le 2,\\ 0,\ \ при\ \ x>2.\end{cases}$$

Требуется:

а) найти параметр *A*;

б) функцию распределения случайной величины X;

в) построить график функции распределения;

г) найти вероятность попадания случайной величины X в интервал $(1/2;1)$.

Решение:

а) Параметр A подберем так, чтобы выполнялось свойство (2) плотности распределения:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1\cdot$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{0}^{2} Ax^2dx = A\frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{8}{3}A, \quad \frac{8}{3}A = 1\cdot$$

Отсюда $A = \frac{3}{8}$.

б) Функцию распределения $F(x)$ будем искать на каждом интервале отдельно.

Для значений $x \le 0$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = 0,$$

Для значений $0 < x \le 2$

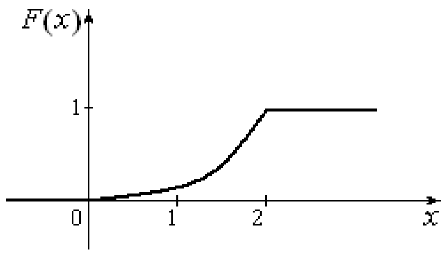
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{0}^{x} \frac{3}{8}t^2dt = \frac{t^3}{8}\Big|_0^x = \frac{x^3}{8}\cdot$$

Для значений $x > 2$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{0}^{2} \frac{3}{8}t^2dt = \frac{t^3}{8}\Big|_0^2 = \frac{2^3}{8} = 1\cdot$$

Таким образом, $F(x) = \begin{cases} 0 \;\; при \;\; x \le 0, \\ \frac{x^3}{8} \;\; при \;\; 0 < x \le 2, \\ 1, \;\; при \;\; x > 2. \end{cases}$

в) График этой функции изображен на рисунке.



г) Вероятность попадания случайной величины X в интервал $(1/2;1)$ вычисляем по формуле:

$$P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha):$$

$$P\left(\frac{1}{2} < X < 1\right) = F(1) - F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{x^3}{8}\Big|_{1/2}^{1} = \frac{1}{8} - \frac{1}{64} = \frac{7}{64}\cdot$$

При этом разобьем область интегрирования на три части, как это сделано в выражении для $f(x)$:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{0} x0dx + \int_{0}^{2} x\frac{1}{2}xdx + \int_{b}^{+\infty} x0dx = \frac{1}{2}\frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{4}{3}.$$

Задание: решите задачи

Вариант 1

1. Дана плотность распределения $f(x)$ случайной величины X.

$$f(x)=\begin{cases}0 \ \ при \ \ x\le -1,\\ c(x+1) \ \ при \ \ -1<x\le 0,\\ 0, \ \ при \ \ x>0.\end{cases}$$

$\alpha = -1{,}8$; $\beta = 0{,}6$.

Требуется:

а) найти параметр c;

б) функцию распределения случайной величины X;

в) построить графики функции распределения и плотности распределения;

г

) вероятность попадания случайной величины X в интервал $(\alpha;\beta)$.

2. С.в. X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0, \quad x<1;\\ \dfrac{x^2-1}{3}, \ \ 1\le x<2;\\ 1, \ \ x\ge 2.\end{cases}$$

a) Найти f(x), M(X), Д(X).
b) Построить графики функций f(x), F(x).
c) Вычислить P(1,5<X<2.5).

Вариант 2

1. С.в. X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0, \quad x\langle 0;\\ x(2-x), \ \ 0\le x<1;\\ 1, \ \ x\ge 1.\end{cases}$$

1) Найти f(x).
2) Построить графики функций f(x), F(x).
3) Вычислить P(0.5<X<1.5).

2. Дана плотность распределения $f(x)$ случайной величины X.

$$f(x)=\begin{cases}0 \ \ при \ \ x\le 0,\\ x/5c \ \ при \ \ 0<x\le 10,\\ 0, \ \ при \ \ x>10.\end{cases}$$

$\alpha = 6{,}2$; $\beta = 10{,}5$.

Требуется:

а) найти параметр c;

б) функцию распределения случайной величины X;

в) построить графики функции распределения и плотности распределения;

г) вероятность попадания случайной величины X в интервал $(\alpha;\beta)$.

Вариант 3

1. С.в. X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0, \quad x<2;\\ (x-2)^2, \ \ 2\le x\le 3;\\ 1, \ \ x>3.\end{cases}$$

1) Найти f(x).
2) Построить графики функций f(x), F(x).
3) Вычислить P(2,5<X<3,5).

2. Дана плотность распределения $f(x)$ случайной величины X.

$$f(x)=\begin{cases}0 \;\; при \;\; x\le 0,\\ c(2-x) \;\; при \;\; 0<x\le 2,\\ 0, \;\; при \;\; x>2.\end{cases}$$

$\alpha = 1{,}2$; $\beta = 1{,}5$.

Требуется:

а) найти параметр c;

б) функцию распределения случайной величины X;

в) построить графики функции распределения и плотности распределения;

г) вероятность попадания случайной величины X в интервал $(\alpha;\beta)$.

Вариант 4

1. С.в. Х задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0, \quad x\le 0;\\ \dfrac{x^2}{16}, \;\; 0<x\le 4;\\ 1, \;\; x>4.\end{cases}$$

   1) Найти f(x).
   2) Построить графики функций f(x), F(x).
   3) Вычислить $P(X\ge 3)$.

2. Дана плотность распределения $f(x)$ случайной величины X.

$$f(x)=\begin{cases}0 \;\; при \;\; x\le 0,\\ 2x/c \;\; при \;\; 0<x\le 5,\\ 0, \;\; при \;\; x>5.\end{cases}$$

$\alpha = 1{,}3$; $\beta = 3{,}7$.

Требуется:

а) найти параметр c;

б) функцию распределения случайной величины X;

в) построить графики функции распределения и плотности распределения;

г) вероятность попадания случайной величины X в интервал $(\alpha;\beta)$.

Форма отчета: отчетная работа

Практическое занятие № 10

Тема: вычисление характеристик НСВ

Цель: научить решать задачи с использованием больших чисел.

Оборудование: тетрадь, ручка

Методические указания: изучите теоретический материал, решить задачи по вариантам (номер варианта назначает преподаватель)

Ход выполнения:

Теоретический материал

Числовые характеристики НСВ

Математическое ожидание с.в. Х находится по формуле

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx,$$ если сходится несобственный интеграл.

Дисперсией с.в. Х называют несобственный интеграл

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}(x-M(X))^2\cdot f(x)dx,$$ если он сходится.

Для вычисления дисперсии более удобна следующая формула:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)dx - (M(X))^2.$$

Пример. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{при} \quad x \le 0, \\ x - \frac{1}{4}x^3 \quad \text{при} \ 0 < x < 2, \\ 0 \quad \text{при} \ x \ge 2. \end{cases}$$

Найти математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратичное отклонение с.в. X.

Решение: Воспользуемся определениями.

$$M[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^2 x\left(x - \frac{1}{4}x^3\right)dx = \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{20}x^5\right)\Bigg|_0^2 = \frac{8}{3} - \frac{8}{5} = \frac{16}{15}.$$

$$M[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int_0^2 x^2\left(x - \frac{1}{4}x^3\right)dx = \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{24}x^6\right)\Bigg|_0^2 = \frac{4}{3}.$$

$$D[X] = M[X^2] - M^2[X] = \frac{4}{3} - \frac{256}{225} = \frac{44}{225}.$$

$$\sigma[X] = \sqrt{D[X]} = \frac{2\sqrt{11}}{15}.$$

Задание: решите задачи

Вариант 1

1. С.в. X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, \quad x \langle 0; \\ x(2-x), \quad 0 \le x < 1; \\ 1, \quad x \ge 1. \end{cases}$$

   4) найти f(x).
   5) вычислить числовые характеристики с.в.X.
   6) вычислить P(0.5<X<1.5).

2. Дана плотность распределения $f(x)$ случайной величины X.

$$f(x) = \begin{cases} 0 \ \ при \ \ x \le 0, \\ x/5c \ \ при \ \ 0 < x \le 10, \\ 0, \ \ при \ \ x > 10. \end{cases} \qquad \alpha = 6{,}2; \ \ \beta = 10{,}5.$$

Требуется:

   1) найти параметр c;
   2) вычислить числовые характеристики с.в.X.
   3) вероятность попадания случайной величины X в интервал $(\alpha; \beta)$.

Вариант 2

3. С.в. X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, \quad x \le 0; \\ \frac{x^2}{16}, \quad 0 < x \le 4; \\ 1, \quad x > 4. \end{cases}$$

   4) найти f(x).
   5) вычислить числовые характеристики с.в.X.
   6) вычислить P(X≥3).

4. Дана плотность распределения $f(x)$ случайной величины X.

$$f(x) = \begin{cases} 0 \ \ при \ \ x \le 0, \\ 2x/c \ \ при \ \ 0 < x \le 5, \\ 0, \ \ при \ \ x > 5. \end{cases} \qquad \alpha = 1{,}3; \ \ \beta = 3{,}7.$$

Требуется:

1) найти параметр c;
2) вычислить числовые характеристики с.в.X.
3) вероятность попадания случайной величины X в интервал $(\alpha;\beta)$.

Вариант 3

3. Дана плотность распределения $f(x)$ случайной величины X.

$$f(x)=\begin{cases}0 \;\; npu \;\; x\le -1,\\ c(x+1) \;\; npu \;\; -1<x\le 0,\\ 0, \;\; npu \;\; x>0.\end{cases} \qquad \alpha=-1{,}8;\;\; \beta=0{,}6.$$

Требуется:

1) найти параметр c;
2) вычислить числовые характеристики с.в.X.
3) вероятность попадания случайной величины X в интервал $(\alpha;\beta)$.

4. С.в. X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0, \quad x<1;\\ \dfrac{x^2-1}{3}, \;\; 1\le x<2;\\ 1, \;\; x\ge 2.\end{cases}$$

1) найти параметр c;
2) вычислить числовые характеристики с.в.X.
3) вычислить вероятность P(1,5<X<2.5).

Вариант 4

3. С.в. X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0, \quad x<2;\\ (x-2)^2, \;\; 2\le x\le 3;\\ 1, \;\; x>3.\end{cases}$$

4) Найти f(x).
5) Построить графики функций f(x), F(x).
6) Вычислить P(2,5<X<3,5).

4. Дана плотность распределения $f(x)$ случайной величины X.

$$f(x)=\begin{cases}0 \;\; npu \;\; x\le 0,\\ c(2-x) \;\; npu \;\; 0<x\le 2,\\ 0, \;\; npu \;\; x>2.\end{cases} \qquad \alpha=1{,}2;\;\; \beta=1{,}5.$$

Требуется:

1) найти параметр c;
2) вычислить числовые характеристики с.в.X.
3) вероятность попадания случайной величины X в интервал $(\alpha;\beta)$.

Форма отчета: отчетная работа

Практическое занятие № 11

Тема: вычисление вероятностей для нормального распределения

Цель: отработать навыки вычисления вероятностей нормального распределения

Оборудование: тетрадь, ручка

Методические указания: изучите теоретический материал, решить задачи по вариантам (номер варианта назначает преподаватель)

Ход выполнения:

Теоретический материал

Нормальное распределение

Непрерывная случайная величина X имеет ***нормальное распределение*** (или *распределение Гаусса*), если ее плотность распределения имеет вид:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Постоянные a и σ ($\sigma>0$) называются *параметрами нормального распределения* и представляют собой соответственно математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение случайной величины X, т. е.

$$M(X)=a,\ \sigma(X)=\sigma.\quad D(X)=\sigma^2.$$

Функция распределения нормальной случайной величины

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}dt$$

связана с функцией Лапласа соотношением

$$F(x)=\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)+0{,}5.$$

где $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\Pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ - функция Лапласа, таблицу значений которой можно найти в приложениях.

Замечание: Ф(х) - функция нечетная, т.е. Ф(-х)=-Ф(х).

Поэтому для нормальной случайной величины справедлива формула

$$P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right).$$

Вероятность того, что абсолютная величина отклонения нормальной случайной величины меньше положительного числа δ, равна:

$$P(|X-a|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

В частности,

$$P(|X-a|<3\sigma)=2\Phi\left(\frac{3\sigma}{\sigma}\right)=2\Phi(3)\approx 0{,}9973.$$

Отсюда следует «***правило трех сигм***»: если случайная величина X имеет нормальное распределение, то отклонение этой случайной величины от ее математического ожидания по абсолютной величине не превышает утроенное среднее квадратическое отклонение (3σ).

Нормальный закон – наиболее часто встречающийся закон распределения, он является предельным законом, к которому, при определенных условиях, приближаются другие законы распределения.

Пример 1. Нормально распределенная случайная величина X задана плотностью вероятности $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-6)^2}{8}}$. Требуется найти:

а) математическое ожидание и дисперсию X;

б) вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу $(3;10)$;

в) вероятность того, что абсолютная величина отклонения X от математического ожидания окажется меньше 5.

Решение.

а) Сравнив данную функцию с плотностью нормального распределения, заключаем, что $a=6$, $\sigma=2$. Следовательно, $M(X)=6$, $D(X)=2^2=4$.

б) Воспользуемся формулой $P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right)$.

В нашем случае $a = 6$, $\sigma = 2$, $\alpha = 3$; $\beta = 10$.

$P(3 < X < 10) = \Phi\left(\frac{10-6}{2}\right) - \Phi\left(\frac{3-6}{2}\right) = \Phi(2) - \Phi(-1{,}5) = \Phi(2) + \Phi(1{,}5) \approx 0{,}4772 + 0{,}4332 = 0{,}9104$.

Значения $\Phi(2)$ и $\Phi(1{,}5)$ определили по таблице значений функции Лапласа.

в) Воспользуемся формулой $P(|X - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$, где $a = 6$, $\sigma = 2$, $\delta = 5$.

$P(|X - 6| < 5) = 2\Phi\left(\frac{5}{2}\right) = 2\Phi(2{,}5) \approx 2 \cdot 0{,}4938 = 0{,}9876$.

<u>Пример 2</u>: Ошибка измерительного прибора - случайная величина, распределенная по нормальному закону, со средним квадратическим отклонением 3 мк. Систематическая ошибка прибора отсутствует. Какова вероятность того, что в независимом измерении ошибка окажется в интервале (0 ; 2,4)?

<u>Решение</u>: Вычислим вероятность того, что в результате измерения случайная, величина X - ошибка измерительного прибора будет принадлежать интервалу (0 ; 2,4):

$$P(0 \langle X \langle 2{,}4) = \Phi\left(\frac{2{,}4-0}{3}\right) - \Phi\left(\frac{0-0}{3}\right) = \Phi(0{,}8) - \Phi(0) = 0{,}2881$$

Здесь математическое ожидание a=0 (так как систематическая ошибка отсутствует, то среднее значение ошибки при большом числе измерений будит равно нулю).

Ф(0)=0, Ф(0,8)=0,2881 находим по таблице Лапласа.

Задание: решите задачи

Вариант 1

1. Нормально распределенная случайная величина X задана плотностью вероятности $f(x)$. Требуется найти:

   а) математическое ожидание и дисперсию X;

   б) вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу $(\alpha; \beta)$;

   в) вероятность того, что абсолютная величина отклонения $X - M(X)$ окажется меньше δ.

$$f(x) = \frac{1}{6\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-14)^2}{72}} \quad \alpha = 5;\ \beta = 24;\ \delta = 10.$$

2. Среднее квадратическое отклонение ошибок измерения дальности радиолокатором равно 25 м, а систематическая ошибка отсутствует. Определить вероятность получения ошибки измерения дальности, по абсолютной величине, не превосходящей 20 м.
3. Предполагается, что дальность полета снаряда распределена нормально с математическим ожиданием 1000 м и средним квадратическим отклонением 50м. Найти вероятность того, что снаряд даст перелет от 40 до 60м.
4. Производится стрельба по наземной цели снарядами, снабженными радио взрывателями. Номинальная высота подрыва снаряда, на которую рассчитан взрыватель, равна а, но фактически имеют место ошибки в высоте, распределенные по нормальному закону со средним квадратическим отклонением а/2. (систематической ошибки нет). Если взрыватель не сработает над землей, взрыва снаряда вообще не происходит. Найти вероятность того, что при стрельбе тремя снарядами ни один снаряд не разорвется на высоте более 1,2 а.

Вариант 2

1. Нормально распределенная случайная величина X задана плотностью вероятности $f(x)$. Требуется найти:

   а) математическое ожидание и дисперсию X;

   б) вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу $(\alpha; \beta)$;

в) вероятность того, что абсолютная величина отклонения $X - M(X)$ окажется меньше δ.

$$f(x)=\frac{1}{6\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-16)^2}{72}} \qquad \alpha=5;\ \beta=28;\ \delta=12$$

2. Самолет сбрасывает одну бомбу на железнодорожный мост, ширина которого 10 м. Направление захода самолета вдоль моста. Прицеливание по средней линии моста. Среднее квадратическое отклонение равно 35м. Систематические ошибки отсутствуют. Найти вероятность попадания в мост.
3. Считается, что отклонение длины изготавливаемых деталей от стандарта является случайной величиной, распределенной по нормальному закону . Если стандартная длина равна m=40 см и среднее квадратическое отклонение σ=0,4 см, то какую точность длины изделия можно гарантировать с вероятностью 0,8?
4. Длина детали представляет собой случайную величину, распределенную по нормальному закону, со средним значением 20 см и дисперсией , равной 0,04 см^2. На станке изготовили две детали. Найти вероятность того, что длина деталей заключена между19,5 см и 20,5 см.

Вариант 3

1. Нормально распределенная случайная величина X задана плотностью вероятности $f(x)$. Требуется найти:

   а) математическое ожидание и дисперсию X;

   б) вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу $(\alpha;\beta)$;

   в) вероятность того, что абсолютная величина отклонения $X - M(X)$ окажется меньше δ.

$$f(x)=\frac{1}{3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-12)^2}{18}} \qquad \alpha=10;\ \beta=15;\ \delta=4$$

2. Производится два независимых измерения прибором, имеющим систематическую ошибку 5 м и среднее квадратическое отклонение 6 м. Какова вероятность того, что измеренные значения будут отклоняться от истинного по абсолютной величине не более, чем на 15 м?
3. Производится выстрел по полосе автострады. Ширина полосы 20 м. Прицеливание производится по средней линии полосы. Систематическая ошибка отсутствует. Среднее квадратическое отклонение точки попадания в направлении, перпендикулярном полосе, равно 16 м. Найти вероятность попадания в полосу.
4. Деталь считается годной, если отклонение её контролируемого размера от проектного не превышает 10 мм. Случайные отклонения подчинены нормальному закону со средним квадратическим отклонением 5 мм и математическим ожиданием, равным нулю. Найти вероятность изготовления годной детали.

Вариант 4

1. Нормально распределенная случайная величина X задана плотностью вероятности $f(x)$. Требуется найти:

   а) математическое ожидание и дисперсию X;

   б) вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу $(\alpha;\beta)$;

   в) вероятность того, что абсолютная величина отклонения $X - M(X)$ окажется меньше δ.

$$f(x)=\frac{1}{4\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-10)^2}{32}} \qquad \alpha=8;\ \beta=20;\ \delta=8$$

2. Размер цилиндра деталей является случайной величиной, распределенной по нормальному закону с математическим ожиданием 5см и дисперсией 0,81см^2 .

Найти вероятность того, что диаметр наудачу взятой детали лежит между 4 и 7 см.

3. Производится одно измерение прибором, имеющим систематическую ошибку 5 м и среднее квадратическое отклонение 6 м. Какова вероятность того, что измеренное значение будет отклоняться от истинного не более, чем на 15 м?
4. Предполагая, что дальность полета снаряда распределена по нормальному закону, со средним квадратическим отклонением 40 м, найти вероятность того, что снаряд даст перелет от 60 до 80 м, если известно, что прицеливание систематических ошибок не имеет.

Форма отчета: отчетная работа

Практическое занятие № 12

Тема: использование расчетных формул, таблица, графиков при решении статистических задач, построение по заданной выборке ее графической диаграммы, расчет числовых характеристик

Цель: научить использовать расчетные формулы, таблицы графики при решении статистических задач.

Оборудование: тетрадь, ручка

Методические указания: изучите теоретический материал, решить задачи по вариантам (номер варианта назначает преподаватель)

Ход выполнения:

Теоретический материал

Графическое изображение выборки

Графически вариационный ряд изображается ***полигоном частот***, представляющим собой ломаную, отрезки которой соединяют на плоскости соседние точки $(x_i; n_i)$ и $(x_{i+1}; n_{i+1})$ или $(x_i; w_i)$ и $(x_{i+1}; w_{i+1})$, если строится полигон относительных частот.

В случае табл. 2 исходный интервал, в котором заключены все наблюдаемые значения признака, разбивают на определенное количество равных интервалов длины $h = x_i - x_{i-1}$. После этого строится ***гистограмма частот*** – ступенчатая фигура, состоящая из прямоугольников, основания которых равны h, а высоты равны отношению $\frac{n_i}{h}$ (или $\frac{w_i}{h}$ для гистограммы относительных частот).

Точечные оценки параметров распределения

По аналогии с такими числовыми характеристиками случайной величины, как математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение, для выборки $x_1, x_2, ..., x_n$ случайной величины X и для статистического ряда определяются следующие числовые характеристики:

выборочная средняя $\bar{x}_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i$, где k – число вариант и $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$;

выборочная дисперсия $D_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i\left(x_i - \bar{x}_в\right)^2$ или $D_в = \overline{x^2} - \left(\bar{x}_в\right)^2$, $\overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2$;

выборочное среднее квадратическое отклонение $\sigma_в = \sqrt{D_в}$

Исправленная дисперсия S^2 вычисляется по формуле:

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k} n_i\left(x_i - \bar{x}_в\right)^2 = \frac{n}{n-1}D_в.$$

Пример: По заданному статистическому ряду требуется:

а) построить гистограмму относительных частот;

б) перейти к вариантам и построить полигон относительных частот;

в) построить эмпирическую функцию распределения.

$x_i - x_{i+1}$	12 –15	15 – 18	18 – 21	21 – 24	24 – 27	27 – 30
n_i	2	6	12	19	7	4

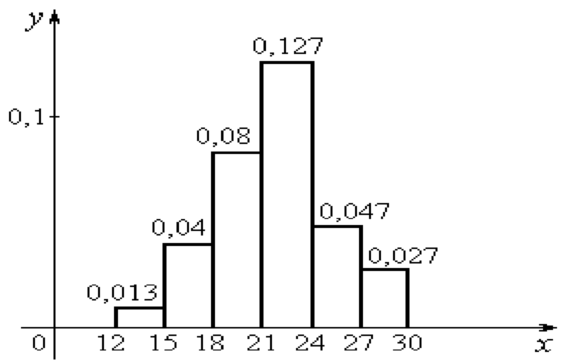
Решение

а) Объем выборки $n = 2 + 6 + 12 + 19 + 7 + 4 = 50$.

Определяем относительные частоты $w_i = \frac{n_i}{n}$ и составляем таблицу с относительными частотами:

$x_i - x_{i+1}$	12 –15	15 – 18	18 – 21	21 – 24	24 – 27	27 – 30
w_i	0,04	0,12	0,24	0,38	0,14	0,08

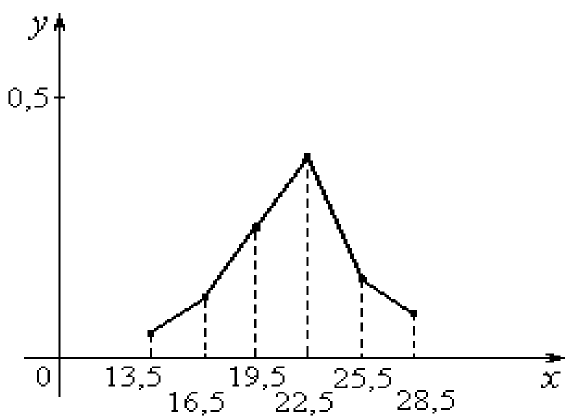
Для построения гистограммы относительных частот на оси абсцисс откладываются частичные интервалы длины $h = 3$, а над ними проводятся горизонтальные отрезки на расстоянии $y_i = \frac{w_i}{3}$



б) Перейдем к вариантам, положив их равными серединам частичных интервалов $\hat{x}_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$, где x_i, x_{i+1}– концы интервалов. Тогда вариационный ряд имеет вид:

x_i	13,5	16,5	19,5	22,5	25,5	28,5
w_i	0,04	0,12	0,24	0,38	0,14	0,08

Отметим на плоскости точки (x_i, w_i), $\left(i = \overline{1, 6}\right)$ и, соединив соседние точки, получим полигон относительных частот.



в) Эмпирическая функция распределения $F^*(x)$ строится по закону: $F^*(x) = P(x < x_i)$
В нашем случае получаем:

$$F^*(x) = \begin{cases} 0 & при \quad x \le 13{,}5, \\ 0{,}04 & при \quad 13{,}5 < x \le 16{,}5, \\ 0{,}16 & при \quad 16{,}5 < x \le 19{,}5, \\ 0{,}40 & при \quad 19{,}5 < x \le 22{,}5, \\ 0{,}78 & при \quad 22{,}5 < x \le 25{,}5, \\ 0{,}92 & при \quad 25{,}5 < x \le 28{,}5, \\ 1 & при \quad x > 28{,}5. \end{cases}$$

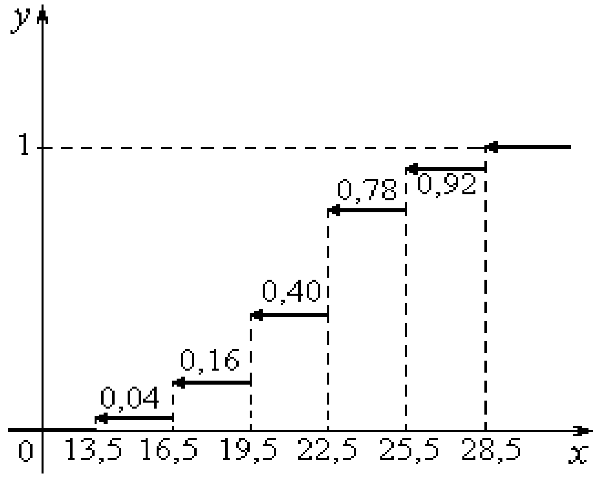


График функции $F^*(x)$:

Задание: решите задачи

Вариант 1

1. Статистический ряд задан таблицей. Требуется:
а) построить гистограмму относительных частот;
б) перейти к вариантам и построить полигон относительных частот;
в) записать эмпирическую функцию распределения и построить ее график:

(–6; –4)	(–4; –2)	(–2; 0)	(0; 2)	(2; 4)	(4; 6)
2	6	17	18	4	3

2. Выборка задана в виде распределения частот:

x_i	3	5	8	13	15	18
n_i	4	6	7	14	10	9

Найти точечные оценки выборки.

Вариант 2

1. Статистический ряд задан таблицей. Требуется:
а) построить гистограмму относительных частот;
б) перейти к вариантам и построить полигон относительных частот;
в) записать эмпирическую функцию распределения и построить ее график:

(0; 2)	(2; 4)	(4; 6)	(6; 8)	(8; 10)	(10; 12)
1	3	19	21	4	2

2. Выборка задана в виде распределения частот:

x_i	6	8	10	14	17	21
n_i	10	15	30	10	10	25

Найти точечные оценки выборки.

Вариант 3

1. Статистический ряд задан таблицей. Требуется:
а) построить гистограмму относительных частот;
б) перейти к вариантам и построить полигон относительных частот;
в) записать эмпирическую функцию распределения и построить ее график:

(–4; –2)	(–2; 0)	(0; 2)	(2; 4)	(4; 6)	(6; 8)
3	8	14	15	9	1

2. Выборка задана в виде распределения частот:

x_i	4	7	8	12	18	22
n_i	6	2	4	10	16	12

Найти точечные оценки выборки.

Вариант 4

1. Статистический ряд задан таблицей. Требуется:
а) построить гистограмму относительных частот;
б) перейти к вариантам и построить полигон относительных частот;
в) записать эмпирическую функцию распределения и построить ее график:

(–2; 0)	(0; 2)	(2; 4)	(4; 6)	(6; 8)	(8; 10)
1	4	20	19	4	2

2. Выборка задана в виде распределения частот:

x_i	7	9	12	15	17	20
n_i	10	12	18	30	10	20

Найти точечные оценки выборки.

Форма отчета: отчетная работа

Практическое занятие № 13

Тема: использование расчетных формул, таблица, графиков при решении статистических задач, моделирование случайных величин, моделирование сложных испытаний и их результатов

Цель: научиться использовать расчетные формулы при решении статистических задач

Оборудование: тетрадь, ручка

Методические указания: изучите теоретический материал, решить задачи по вариантам (номер варианта назначает преподаватель)

Ход выполнения:

Теоретический материал

Интервальная оценка математического ожидания нормального распределения

Если случайная величина распределена нормально и среднее квадратическое отклонение σ известно, то доверительный интервал для оценки математического ожидания a

$$\bar{x}_в - \frac{t\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_в + \frac{t\sigma}{\sqrt{n}},$$

где n – объем выборки, а t находится из равенства $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2}$ по таблице значений функции Лапласа $\Phi(t)$.

Если σ неизвестно, то в формуле (1) оно заменяется на исправленное среднее квадратическое отклонение S, t заменяется на $t_\gamma = t(\gamma, n)$, которое находится по таблице (приложение)

$$\bar{x}_в - \frac{t_\gamma S}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_в + \frac{t_\gamma S}{\sqrt{n}}.$$

Интервальная оценка среднего квадратического отклонения нормального распределения

Доверительный интервал для оценки среднего квадратического отклонения σ нормального распределения с заданной надежностью γ находится по формуле

$$S(1-q) < \sigma < S(1+q),$$

где $q = q(\gamma, n)$ находится по таблице (приложение).

Интервальная оценка вероятности события

Интервальной оценкой (с надежностью γ) неизвестной вероятности p биномиального распределения по относительной частоте ω служит доверительный интервал (с приближенными концами p_1 и p_2) $p_1 < p < p_2$,

где

$$p_1 = \frac{n}{t^2+n}\left(\omega + \frac{t^2}{2n} - t\sqrt{\frac{\omega(1-\omega)}{n} + \left(\frac{t^2}{2n}\right)^2}\right), \qquad p_2 = \frac{n}{t^2+n}\left(\omega + \frac{t^2}{2n} + t\sqrt{\frac{\omega(1-\omega)}{n} + \left(\frac{t^2}{2n}\right)^2}\right)$$

n- общее число испытаний; m- число появления события; ω - относительная частота, $\omega = m/n$; t- значение аргумента функции Лапласа, при котором $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2}$.($\gamma$ -заданная надежность).

Замечание: При больших значениях n (порядка сотен) можно принять в качестве приближенных границ доверительного интервала

$$p_1 = \omega - t\sqrt{\frac{\omega(1-\omega)}{n}}, \qquad p_2 = \omega + t\sqrt{\frac{\omega(1-\omega)}{n}}.$$

Пример: Дано распределение частот выборки.

x_i	13,5	16,5	19,5	22,5	25,5	28,5
w_i	0,04	0,12	0,24	0,38	0,14	0,08

Найти доверительные интервалы для математического ожидания a и среднего квадратического отклонения σ с доверительной вероятностью γ= 0,95, если известно, что генеральная совокупность распределена по нормальному закону.

Решение: Вычислим точечные оценки заданной выборки: $\bar{x}_в = 21{,}6$, $D_в = 13{,}05$, $\sigma_в = 3{,}6$.

Так как объем выборки $n = 50$, то находим $S = \sqrt{\frac{50}{49} \cdot 13{,}05} = 3{,}64$.

По таблице приложения находим $t_\gamma = t(0{,}95;\, 50) = 2{,}009$.

Подставляя полученные значения S и t_γ в формулу, получим

$$21{,}6 - \frac{2{,}009 \cdot 3{,}64}{\sqrt{50}} < a < 21{,}6 + \frac{2{,}009 \cdot 3{,}64}{\sqrt{50}}$$

$$20{,}56 < a < 22{,}64.$$

По таблице найдем $q = q(0{,}95;\, 50) = 0{,}21$.

Подставляя значения S и q в формулу, получим $3{,}64 \cdot (1 - 0{,}21) < \sigma < 3{,}64 \cdot (1 + 0{,}21)$

$$2{,}87 < \sigma < 4{,}40.$$

Пример: Изготовлен экспериментальный игровой автомат, который должен обеспечить появление выигрыша в одном случае из 100 бросаний монеты в автомат. Для проверки пригодности автомата произведено 400 испытаний, причем выигрыш появился 5 раз. Найти доверительный интервал, покрывающий неизвестную вероятность появления выигрыша с надежностью γ =0.999.

Решение: Найдем относительную частоту появления выигрыша $\omega = \frac{m}{n} = \frac{5}{400} = 0.0125$.

Найдем t из соотношения $\Phi(t)=\frac{\gamma}{2}=\frac{0.999}{2}=0.4995$. По таблице функции Лапласа находим t=3,3.

Учитывая, что n=400 велико, используем для отыскания границ доверительного интервала приближенные формулы: $p_1=\omega-t\sqrt{\frac{\omega(1-\omega)}{n}}$, $p_2=\omega+t\sqrt{\frac{\omega(1-\omega)}{n}}$.

Подставив в эти формулы n=400, $\omega=0.0125$, t=3,3, получим p_1= -0,0058, p_2= 0,0308.

Итак, искомый доверительный интервал $0<p<0.0308$.

Задание 2: решите задачи

Интервальная оценка математического ожидания нормального распределения

Если случайная величина распределена нормально и среднее квадратическое отклонение σ известно, то доверительный интервал для оценки математического ожидания *a*

$$\bar{x}_в-\frac{t\sigma}{\sqrt{n}}<a<\bar{x}_в+\frac{t\sigma}{\sqrt{n}},$$

где *n* – объем выборки, а *t* находится из равенства $\Phi(t)=\frac{\gamma}{2}$ по таблице значений функции Лапласа $\Phi(t)$.

Если σ неизвестно, то в формуле (1) оно заменяется на исправленное среднее квадратическое отклонение *S*, *t* заменяется на $t_\gamma=t(\gamma,n)$, которое находится по таблице (приложение)

$$\bar{x}_в-\frac{t_\gamma S}{\sqrt{n}}<a<\bar{x}_в+\frac{t_\gamma S}{\sqrt{n}}.$$

Интервальная оценка среднего квадратического отклонения нормального распределения

Доверительный интервал для оценки среднего квадратического отклонения σ нормального распределения с заданной надежностью γ находится по формуле

$$S(1-q)<\sigma<S(1+q),$$

где $q=q(\gamma,n)$ находится по таблице (приложение).

Интервальная оценка вероятности события

Интервальной оценкой (с надежностью γ) неизвестной вероятности p биномиального распределения по относительной частоте ω служит доверительный интервал (с приближенными концами p_1 и p_2) $p_1<p<p_2$,

где

$$p_1=\frac{n}{t^2+n}\left(\omega+\frac{t^2}{2n}-t\sqrt{\frac{\omega(1-\omega)}{n}+\left(\frac{t^2}{2n}\right)^2}\right),\qquad p_2=\frac{n}{t^2+n}\left(\omega+\frac{t^2}{2n}+t\sqrt{\frac{\omega(1-\omega)}{n}+\left(\frac{t^2}{2n}\right)^2}\right)$$

n- общее число испытаний; m- число появления события; ω - относительная частота, $\omega=m/n$; t- значение аргумента функции Лапласа, при котором $\Phi(t)=\frac{\gamma}{2}$.(γ -заданная надежность).

Замечание: При больших значениях n (порядка сотен) можно принять в качестве приближенных границ доверительного интервала

$$p_1=\omega-t\sqrt{\frac{\omega(1-\omega)}{n}},\qquad p_2=\omega+t\sqrt{\frac{\omega(1-\omega)}{n}}.$$

Пример: Дано распределение частот выборки.

x_i	13,5	16,5	19,5	22,5	25,5	28,5
w_i	0,04	0,12	0,24	0,38	0,14	0,08

Найти доверительные интервалы для математического ожидания a и среднего квадратического отклонения σ с доверительной вероятностью $\gamma = 0,95$, если известно, что генеральная совокупность распределена по нормальному закону.

Решение: Вычислим точечные оценки заданной выборки: $\overline{x}_в = 21,6$, $D_в = 13,05$, $\sigma_в = 3,6$.

Так как объем выборки $n = 50$, то находим $S = \sqrt{\frac{50}{49} \cdot 13,05} = 3,64$.

По таблице приложения находим $t_\gamma = t(0,95; 50) = 2,009$.

Подставляя полученные значения S и t_γ в формулу, получим

$$21,6 - \frac{2,009 \cdot 3,64}{\sqrt{50}} < a < 21,6 + \frac{2,009 \cdot 3,64}{\sqrt{50}}$$

$$20,56 < a < 22,64.$$

По таблице найдем $q = q(0,95; 50) = 0,21$.

Подставляя значения S и q в формулу, получим $3,64 \cdot (1 - 0,21) < \sigma < 3,64 \cdot (1 + 0,21)$

$$2,87 < \sigma < 4,40.$$

Пример: Изготовлен экспериментальный игровой автомат, который должен обеспечить появление выигрыша в одном случае из 100 бросаний монеты в автомат. Для проверки пригодности автомата произведено 400 испытаний, причем выигрыш появился 5 раз. Найти доверительный интервал, покрывающий неизвестную вероятность появления выигрыша с надежностью γ=0.999.

Решение: Найдем относительную частоту появления выигрыша $\omega = \frac{m}{n} = \frac{5}{400} = 0.0125$.

Найдем t из соотношения $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2} = \frac{0.999}{2} = 0.4995$. По таблице функции Лапласа находим t=3,3.

Учитывая, что n=400 велико, используем для отыскания границ доверительного интервала приближенные формулы: $p_1 = \omega - t\sqrt{\frac{\omega(1-\omega)}{n}}$, $p_2 = \omega + t\sqrt{\frac{\omega(1-\omega)}{n}}$.

Подставив в эти формулы n=400, $\omega = 0.0125$, t=3,3, получим p_1= -0,0058, p_2= 0,0308.

Итак, искомый доверительный интервал $0 < p < 0.0308$.

Задание: решите задачи

Вариант 1

1. Дано распределение частот выборки. Найти доверительные интервалы для математического ожидания a и среднего квадратического отклонения σ с доверительной вероятностью γ = 0,95, если известно, что генеральная совокупность распределена по нормальному закону

$x_i - x_{i+1}$	10	15	20	25	30	35
n_i	2	6	12	19	7	4

2. Заданы среднее квадратическое отклонение σ нормально распределенной случайной величины X, выборочная средняя $\overline{x_в}$, объем выборки n. Найти доверительный интервал для оценки неизвестного математического ожидания a с надежностью γ=0,99: σ=6, $\overline{x_в}$ =18,61,n=81.
3. По данным выборки объема *n=10* из генеральной совокупности нормально распределенного количественного признака «исправленное» среднее квадратическое отклонение равно 5,1. Найти доверительный интервал, покрывающий генеральное среднее квадратическое отклонение с надежностью 0,999.
4. Произведено 400 испытаний, в каждом из которых неизвестная вероятность p появления события A постоянна. Событие A появилось в 250 испытаниях. Найти доверительный интервал, покрывающий неизвестную вероятность p с надежностью 0,95.

Вариант 2

1. Дано распределение частот выборки. Найти доверительные интервалы для математического ожидания *a* и среднего квадратического отклонения σ с доверительной вероятностью $\gamma = 0{,}95$, если известно, что генеральная совокупность распределена по нормальному закону

$x_i - x_{i+1}$	6	8	10	12	14	16
n_i	3	4	10	3	6	4

2. Заданы среднее квадратическое отклонение σ нормально распределенной случайной величины X, выборочная средняя $\overline{x_в}$, объем выборки *n*. Найти доверительный интервал для оценки неизвестного математического ожидания *a* с надежностью γ=0,99 : σ=5, $\overline{x_в}$ =18,71 , *n*=25.

3. Произведено 10 измерений одним прибором (без систематической ошибки) некоторой физической величины, причем «исправленное» среднее квадратическое отклонение случайных ошибок измерений оказалось равным 0,8. Найти точность прибора с надежностью 0,95.

4. В 360 испытаниях, в каждом из которых вероятность p появления события A неизвестна и одинакова. Событие A появилось 270 раз. Найти доверительный интервал, покрывающий неизвестную вероятность p с надежностью 0,95.

Вариант 3

1. Дано распределение частот выборки. Найти доверительные интервалы для математического ожидания *a* и среднего квадратического отклонения σ с доверительной вероятностью $\gamma = 0{,}95$, если известно, что генеральная совокупность распределена по нормальному закону

$x_i - x_{i+1}$	7	10	13	16	19	22
n_i	5	7	8	10	7	3

2. Заданы среднее квадратическое отклонение σ нормально распределенной случайной величины X, выборочная средняя $\overline{x_в}$, объем выборки *n*. Найти доверительный интервал для оценки неизвестного математического ожидания *a* с надежностью γ=0,99 : σ=5, $\overline{x_в}$ =16,8 , *n*=25.

3. По данным выборки объема *n=50* из генеральной совокупности нормально распределенного количественного признака «исправленное» среднее квадратическое отклонение равно 14. Найти доверительный интервал, покрывающий генеральное среднее квадратическое отклонение с надежностью 0,999.

4. Среди 250 деталей, изготовленных станком-автоматом, оказалось 32 нестандартных. Найти доверительный интервал, покрывающий с надежностью 0,99 неизвестную вероятность p изготовления станком нестандартной детали.

Вариант 4

1. Дано распределение частот выборки. Найти доверительные интервалы для математического ожидания *a* и среднего квадратического отклонения σ с доверительной вероятностью $\gamma = 0{,}95$, если известно, что генеральная совокупность распределена по нормальному закону

$x_i - x_{i+1}$	10	14	18	22	26	28
n_i	9	5	3	7	6	10

2. Заданы среднее квадратическое отклонение σ нормально распределенной случайной величины X, выборочная средняя $\overline{x_в}$, объем выборки *n*. Найти доверительный интервал для оценки неизвестного математического ожидания *a* с надежностью γ=0,99 : σ=3, $\overline{x_в}$ =12.5 , *n*=30.

3. По данным выборки объема $n=60$ из генеральной совокупности нормально распределенного количественного признака «исправленное» среднее квадратическое отклонение равно 9. Найти доверительный интервал, покрывающий генеральное среднее квадратическое отклонение с надежностью 0,999.

4. Производятся независимые испытания с одинаковой, но неизвестной вероятностью р появления события А в каждом испытании. Найти доверительный интервал для оценки вероятности р с надежностью 0,95, если в 500 испытаниях событие А появилось 200 раз.

Форма отчета: отчетная работа

Практическое занятие № 14

Тема: применение современные пакеты прикладных программ многомерного статистического анализа

Цель: научиться применять современные пакеты прикладных программ многомерного статистического анализа

Оборудование: тетрадь, ручка, ПК

Методические указания: изучите теоретический материал, решить задачи по вариантам (номер варианта назначает преподаватель)

Ход выполнения:

Теоретический материал

1. Основные статистические характеристики.

Электронные таблицы *Excel* имеют огромный набор средств для анализа статистических данных. Наиболее часто используемые статистические функции встроены в основное ядро программы, то есть эти функции доступны с момента запуска программы. Другие более специализированные функции входят в дополнительную подпрограмму, называемую пакетом анализа. Команды и функции пакета анализа называют Инструментами анализа. Мы ограничимся изучением нескольких основных встроенных статистических функций и наиболее полезных инструментов анализа из пакета.

Среднее значение.

Функция СРЗНАЧ (или AVERAGE) вычисляет выборочное (или генеральное) среднее, то есть среднее арифметическое значение признака выборочной (или генеральной) совокупности. Аргументом функции СРЗНАЧ является набор чисел, как правило, задаваемый в виде интервала ячеек, например, =СРЗНАЧ (А3:А201).

Дисперсия и среднее квадратическое отклонение.

Для оценки разброса данных используются такие статистические характеристики, как дисперсия D и среднее квадратическое (или стандартное) отклонение σ. Стандартное отклонение есть квадратный корень из дисперсии: $D=\sqrt{\sigma}$. Большое стандартное отклонение указывает на то, что значения измерения сильно разбросаны относительно среднего, а малое – на то, что значения сосредоточены около среднего.

В *Excel* имеются функции, отдельно вычисляющие выборочную дисперсию $D_в$ и стандартное отклонение $\sigma_в$ и генеральные дисперсию $D_г$ и стандартное отклонение $\sigma_г$. Поэтому, прежде чем вычислять дисперсию и стандартное отклонение, следует четко определиться, являются ли ваши данные генеральной совокупностью или выборочной. В зависимости от этого нужно использовать для расчета $D_г$ и $\sigma_г$, $D_в$ и $\sigma_в$.

Для вычисления выборочной дисперсии $D_в$ и выборочного стандартного отклонения $\sigma_в$ имеются функции ДИСП (или VAR) и СТАНДОТКЛОН (или STDEV). Аргументом этих функций является набор чисел, как правило, заданный диапазоном ячеек, например, =ДИСП (В1:В48).

Для вычисления генеральной дисперсии $D_г$ и генерального стандартного отклонения $\sigma_г$ имеются функции ДИСПР (или VARP) и СТАНДОТКЛОНП (или STDEVP), соответственно.

Аргументы этих функций такие же как и для выборочной дисперсии.

Объем совокупности.

Объем совокупности выборочной или генеральной – это число элементов совокупности. Функция СЧЕТ (или COUNT) определяет количество ячеек в заданном диапазоне, которые содержат числовые данные. Пустые ячейки или ячейки, содержащие текст, функция СЧЕТ пропускает. Аргументом функции СЧЕТ является интервал ячеек, например: =СЧЕТ (С2:С16).

Для определения количества непустых ячеек, независимо от их содержимого, используется функция СЧЕТЗ. Ее аргументом является интервал ячеек.

Мода и медиана.

Мода – это значение признака, которое чаще других встречается в совокупности данных. Она вычисляется функцией МОДА (или MODE). Ее аргументом является интервал ячеек с данными.

Медиана – это значение признака, которое разделяет совокупность на две равные по числу элементов части. Она вычисляется функцией МЕДИАНА (или MEDIAN). Ее аргументом является интервал ячеек.

Размах варьирования. Наибольшее и наименьшее значения.

Размах варьирования R – это разность между наибольшим x_{max} и наименьшим x_{min} значениями признака совокупности (генеральной или выборочной): $R=x_{max}-x_{min}$. Для нахождения наибольшего значения x_{max} имеется функция МАКС (или MAX), а для наименьшего x_{min} – функция МИН (или MIN). Их аргументом является интервал ячеек. Для того, чтобы вычислить размах варьирования данных в интервале ячеек, например, от А1 до А100, следует ввести формулу: =МАКС (А1:А100)-МИН (А1:А100).

Отклонение случайного распределения от нормального.

Нормально распределенные случайные величины широко распространены на практике, например, результаты измерения любой физической величины подчиняются нормальному закону распределения. Нормальным называется распределение вероятностей непрерывной случайной величины, которое описывается плотностью

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}},$$

где σ – дисперсия, $\bar{x}$ - среднее значение случайной величины x.

Для оценки отклонения распределения данных эксперимента от нормального распределения используются такие характеристики как асимметрия A и эксцесс E. Для нормального распределения A=0 и E=0.

Асимметрия показывает, на сколько распределение данных несимметрично относительно нормального распределения: если A>0, то большая часть данных имеет значения, превышающие среднее $\bar{x}$; если A<0, то большая часть данных имеет значения, меньшие среднего $\bar{x}$. Асимметрия вычисляется функцией СКОС. Ее аргументом является интервал ячеек с данными, например, =СКОС (А1:А100).

Эксцесс оценивает «крутость», т.е. величину большего или меньшего подъема максимума распределения экспериментальных данных по сравнению с максимумом нормального распределения. Если E>0, то максимум экспериментального распределения выше нормального; если E<0, то максимум экспериментального распределения ниже нормального. Эксцесс вычисляется функцией ЭКСЦЕСС, аргументом которой являются числовые данные, заданные, как правило, в виде интервала ячеек, например: =ЭКСЦЕСС (А1:А100).

Задание: решите задачи

Задание 1

Одним и тем же вольтметром было измерено 25 раз напряжение на участке цепи. В результате опытов получены следующие значения напряжения в вольтах: 32, 32, 35, 37, 35, 38, 32, 33, 34, 37, 32, 32, 35, 34, 32, 34, 35, 39, 34, 38, 36, 30, 37, 28, 30. Найдите выборочные среднюю, дисперсию, стандартное отклонение, размах варьирования, моду, медиану. Проверить отклонение от нормального распределения, вычислив асимметрию и эксцесс.

1. Наберите результаты эксперимента в столбец А.
2. В ячейку В1 наберите «Среднее», в В2 – «выборочная дисперсия», в В3 – «стандартное отклонение», в В4 – «Максимум», в В5 – «Минимум», в В6 – « Размах варьирования», в В7 – «Мода», в В8 – «Медиана», в В9 – «Асимметрия», в В10 – «Эксцесс». Выровняйте ширину этого столбца с помощью *Автоподбора* ширины.
3. Выделите ячейку С1 и нажмите на знак «=» в строке формул. С помощью *Мастера функций* в категории *Статистические* найдите функцию СРЗНАЧ, затем выделите интервал ячеек с данными и нажмите *Enter*.
4. Выделите ячейку С2 и нажмите на знак «=» в строке формул. С помощью помощью *Мастера функций* в категории *Статистические* найдите функцию ДИСП, затем выделите интервал ячеек с данными и нажмите *Enter*.
5. Проделайте самостоятельно аналогичные действия для вычисления стандартного отклонения, максимума, минимума, моды, медианы, асимметрии и эксцесса.
6. Для вычисления размаха варьирования в ячейку С6 следует ввести формулу: =МАКС (А1:А25)-МИН(А1:А25).

2. Инструменты статистического анализа: *Генерация случайных чисел, Гистограмма, Описательная статистика*.

Загрузка *Пакета анализа*.

Пакет анализа без дополнительных установок автоматически не загружается при запуске *Excel*. Он входит в так называемую *Надстройку* – набор дополнительных подпрограмм, к которым относятся, например, уже известные вам *Мастер диаграмм* и *Мастер функций*. Для загрузки *Пакет анализа* необходимо:

1) в *Основном меню* выбрать пункт *Сервис*;
2) выбрать пункт *Надстройки*;
3) в появившемся списке *Надстроек* активизировать переключатель *AnalysisToolPak-VBA* и нажать ОК.

После этого в меню *Сервис* добавится пункт *Анализ данных*. К этому пункту следует обращаться для вызова *Пакета анализа*.

Инструмент: *Генерация случайных чисел*.

В *Excel* имеется встроенная функция СЛЧИСЛ (или RAND) для генерации равномерно распределенных случайных чисел в интервале [0,1].

Пакет анализа позволяет генерировать случайные числа с различными типами распределений: равномерное, нормальное, Бернулли, биномиальное, Пуассона и дискретное (определенное пользователем). Для генерации случайных чисел следует:

1) в меню *Сервис* выбрать команду *Анализ данных*;
2) в появившемся диалоговом окне *Анализ данных* в группе *Инструменты анализа* выбрать пункт *Генерация случайных величин* и нажать *ОК*;
3) в появившемся диалоговом окне *Генерация случайных чисел* следует заполнить поля ввода:

- в полях *Число переменных* и *Число случайных чисел* указать нужное количество столбцов и сколько чисел вы хотите получить в каждом столбце;
- в поле *Распределение* следует выбрать один из имеющихся типов распределения случайных чисел;
- в группе *Параметры* следует указать диапазон чисел, т.е. min и max числа распределения для *Равномерного распределения*; или среднее значение и стандартное отклонение для *Нормального распределения* и т.д.
- поле *Случайное* рассеивание заполняется только в том случае, если вам необходимо несколько раз воспроизводить одну и туже последовательность случайных чисел;
- в поле *Выходной интервал* указывается место, куда следует поместить последовательность чисел, как правило, это интервал ячеек (или столбец целиком).

Инструмент: *Гистограмма.*

Графическое представление результатов обработки статистических данных обычно оформляется в виде гистограммы. Совокупность данных разбивается на частичные интервалы, называемые нормальными. Интервалы разбиения могут быть любой ширины, но обязательно они должны следовать в порядке возрастания. Интервалы разбиения откладываются по оси абсцисс гистограммы. На оси ординат гистограммы откладывается число значений, попавших в интервал разбиения. Это число значений признака совокупности называется частотой. Для построения гистограммы:

1) в начале следует задать частичные интервалы разбиения;
2) затем в меню *Сервис* выбрать команду *Анализ данных* и указать инструмент анализа –*Гистограмма* и нажать *ОК*;
3) в диалоговом окне *Гистограмма* следует указать:

- в группе *Входные данные* в поле *Входной интервал* – интервал ячеек с данными, а в поле *Интервал карманов* – интервал ячеек с частичными интервалами разбиения;
- в группе *Параметры вывода* указывается интервал ячеек для вывода частот и отмечается галочкой переключатель *Вывод графика*.

После нажатия *ОК* инструмент *Гистограмма* выводит два столбца: карман и частота. Сама гистограмма выводится правее столбца частот. Форматирование гистограммы производится так же, как и любой диаграммы в *Excel* (см. лабораторную работу №6).

Инструмент: *Описательная статистика.*

В пакете анализа *Excel* содержится инструмент *Описательная статистика*, который создает таблицу основных статистических характеристик для совокупности данных. В этой таблице будут содержаться следующие характеристики: среднее, стандартная ошибка, дисперсия, стандартное отклонение, мода, медиана, размах варьирования интервала, максимальное и минимальное значения, асимметрия, эксцесс, объем совокупности, сумму всех элементов совокупности, доверительный интервал (уровень надежности). Инструмент *Описательная статистика* существенно упрощает статистический анализ тем, что нет необходимости вызывать каждую функцию для расчета статистических характеристик отдельно.

Для того, чтобы вызвать *Описательную статистику*, следует:

1) в меню *Сервис* выбрать команду *Анализ данных*;
2) в списке *Инструменты анализа* диалогового окна *Анализ данных* выбрать инструмент *Описательная статистика* и нажать *ОК*;
3) в появившемся диалоговом окне *Описательная статистика* необходимо:
   - в группе *Входные данные* в поле *Входной интервал* указать интервал ячеек, содержащих данные;
   - если первая строка во входном диапазоне содержит заголовок столбца, то в *поле Метки в первой строке* следует поставить галочку;
   - активизировать переключатель (поставить галочку) *Итоговая статистика*, если нужен полный список характеристик;
   - активизировать переключатель *Уровень надежности* и указать надежность в %, если необходимо вычислить доверительный интервал.

Задание 2.

Сгенерировать 500 случайных чисел, распределенных нормально. Построить гистограмму и полный список статистических характеристик с помощью *инструмента Описательная статистика*.

1. Выполните команду *Сервис*→*Анализ данных*→*Генерация случайных чисел*;

2..В диалоговом окне *Генерация случайных* чисел введите в поле число переменных: 1; в поле Число случайных чисел 500; выберите *Распределение Нормальное*; задайте любое среднее значение (желательно около 100) и небольшое стандартное отклонение (не больше 10); в поле Выходной интервал укажите абсолютный адрес столбца A2. Нажмите ОК.

1. Теперь постройте гистограмму по совокупности случайных чисел. Сначала нужно задать интервалы решения. Пусть длины интервалов будут одинаковыми и равны 3. Для автоматического составления интервалов разбиения наберите в ячейку B2 начальное число, например, 75 для наших случайных чисел. Затем выполните команду *Правка→Заполнить→Прогрессия*. В появившемся диалоговом окне заполните данные:
   - в группе переключателей поле *Расположение* установите *по столбцам*;
   - в поле *Шаг* наберите 3;
   - в поле *Предельное значение* наберите 125;
   - в группе переключателей *Тип* установите *арифметическая* и нажмите ОК.

   В результате столбец B будет содержать интервалы разбиения (карманы).
2. Выполните команду *Сервис→Анализ данных→Гистограмма*. В появившемся диалоговом окне *Гистограмма* заполните:
   - входной интервал появится, если щелкнуть мышью по столбцу А;
   - интервал карманов появится, если щелкнуть мышью по столбцу В;
   - поставьте галочку в поле метки;
   - укажите столбец С в поле *Выходной интервал*;
   - активизируйте переключатель *Вывод графика*; если это поле не содержит галочки, нажмите ОК.
3. Построение гистограммы займет от 5 до 10 минут. За это время письменно ответьте на контрольные вопросы. В результате вычисления получатся столбец под названием *Карман*, который дублирует ваш столбец интервалов разбиения, и столбец под название *Частота* с рассчитанными частотами. После того, как появилась гистограмма, измените ее размеры с помощью мыши так, чтобы хорошо были видны все столбцы и подписи.
4. Теперь осталось получить таблицу статистических характеристик с *помощью Описательной статистики*. Выполните команду *Сервис→Анализ данных→Описательная статистика*. В появившемся диалоговом окне *Описательная статистика* укажите:
   - в поле *Входной интервал* появится адрес, если выделить мышью интервал сданными или с клавиатуры набрать адрес A2: A501;
   - в поле *Группирование* активизировать переключатель *по столбцам*;
   - активизировать переключатель *Метки в первой строке*;
   - в группе *Параметры вывода* укажите *Выходной интервал*, щелкнув мышью по какой-либо пустой ячейке ниже столбца частот, например, по С 25;
   - активизируйте переключатель *Итоговая статистика* (если в этом поле нет галочки);
   - активизируйте переключатель *Уровня надежности* и установите 95%;
   - снимите галочки с полей *наименьший* и *наибольший* и нажмите ОК.

Форма отчета: отчетная работа

4. ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ

4.1 Основные электронные издания:

О-1. Попов, А. М. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник для среднего профессионального образования / А. М. Попов, В. Н. Сотников; под редакцией А. М. Попова. — 3-е изд., перераб. и доп. — Москва: Издательство Юрайт, 2024. — 425 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-18265-1. — Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/534640 (дата обращения: 02.05.2024).

4.2 Дополнительные источники:

Д-1. Кочетков, Е.С. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник / Е.С. Кочетков, С.О. Смерчинская, В.В. Соколов. – М.: ФОРУМ: ИНФРА-М, 2006. – 240 с.: ил. – (Профессиональное образование).

Д-2. Математическое бюро. Теория вероятности онлайн: учебник с примерами решений [Электронный ресурс]. – Режим доступа: www.url: https://www.matburo.ru/tv_book.php/. – 02.05.2024.

ЛИСТ ИЗМЕНЕНИЙ И ДОПОЛНЕНИЙ, ВНЕСЕННЫХ В МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

№ изменения, дата внесения, № страницы с изменением	
Было	**Стало**
Основание: **Подпись лица, внесшего изменения**	