**ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ИРКУТСКОЙ ОБЛАСТИ «ЧЕРЕМХОВСКИЙ ГОРНОТЕХНИЧЕСКИЙ КОЛЛЕДЖ ИМ. М.И. ЩАДОВА»**

| | |
|---|---|
| **РАССМОТРЕНО** | **УТВЕРЖДАЮ** |
| на заседании ЦК | Зам. директора по УР |
| «Информатики и ВТ» | О.В. Папанова |
| Протокол №10 | «07» июнь 2023 г. |
| «06» июнь 2023 г. | |
| Председатель: Чипиштанова Д.В. | |

# МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

по практическим занятиям студентов
учебной дисциплине

***ЕН.02 Дискретная математика с элементами математической логики***

**Программы подготовки специалистов среднего звена по специальности**

***09.02.07 Информационные системы и программирование***

Разработал:
Литвинцева Е.А.



2023г.

## СОДЕРЖАНИЕ

# 1.ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Методические указания по практическим занятиям учебной дисциплине **«Дискретная математика с элементами математической логики»** составлены в соответствии с учебным планом и рабочей программой дисциплины по специальности ***09.02.07 Информационные системы и программирование***.

Цель проведения практических занятий: формирование практических умений, необходимых в последующей профессиональной и учебной деятельности.

Методические указания являются частью учебно-методического комплекса по учебной дисциплине и содержат:

- тему занятия (согласно тематическому плану учебной дисциплины);
- цель;
- оборудование (материалы, программное обеспечение, оснащение, раздаточный материал и др.);
- методические указания (изучить краткий теоретический материал по теме практического занятия);
- ход выполнения;
- форму отчета.

В результате выполнения полного объема практических работ студент должен у**меть:**

- Применять логические операции, формулы логики, законы алгебры логики;
- Формулировать задачи логического характера и применять средства математической логики для их решения;
- Применять современные пакеты прикладных программ при решении профессиональных задач.

При проведении практических работ применяются следующие технологии и методы обучения:

1. проблемно-поисковых технологий
2. тестовые технологии

**Оценка выполнения заданий практических занятий**

**«Отлично»** - теоретическое содержание курса освоено полностью, без пробелов, умения сформированы, все предусмотренные программой учебные задания выполнены, качество их выполнения оценено высоко.

**«Хорошо»** - теоретическое содержание курса освоено полностью, без пробелов, некоторые умения сформированы недостаточно, все предусмотренные программой учебные задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками.

**«Удовлетворительно»** - теоретическое содержание курса освоено частично, но пробелы не носят существенного характера, необходимые умения работы с освоенным материалом в основном сформированы, большинство предусмотренных программой обучения учебных заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки.

**«Неудовлетворительно»** - теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки.

В соответствии с учебным планом и рабочей программы дисциплины **«Дискретная математика и элементы математической логики»** на практические (лабораторные) занятия отводится **28 часов.**

## 2. ПЕРЕЧЕНЬ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

| № п/п | Тема практических занятий | Количество часов |
|---|---|---|
| 1 | Формулы логики. Таблица истинности и ее построение. | 2 |
| 2 | Формулы логики. Таблица истинности и ее построение. | 2 |
| 3 | Законы алгебры логики. Равносильные преобразования. | 2 |
| 4 | ДНФ и КНФ функции. | 2 |
| 5 | Упрощение формул. | 2 |
| 6 | Операции над множествами. | 2 |
| 7 | Операции над множествами. | 2 |
| 8 | Графическое изображение множеств на диаграммах Эйлера- Венна | |
| 9 | Бинарные отношения и их свойства. Решение задач. | 2 |
| 10 | Теория отображений и алгебра подстановок | |
| 11 | Запись логических выражений с помощью предикатов. Рассмотрение способов записи логических выражений. | 2 |
| 12 | Логические операции над предикатами. Определение логического значения для высказываний. Области определения и истинности предиката. | 2 |
| 13 | Представление графов. Построение графов. | 2 |
| 14 | Конструирование машин Тьюринга | 2 |

## 3.СОДЕРЖАНИЕ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

### Практическое занятие № 1

**Тема:** Алгебра высказываний

**Цель:** получение практических навыков работы с таблицей истинности, формулами логики

**Оборудование:** ручка, тетрадь

**Задание 1:** рассмотрите примеры

**Пример 1.** Пусть имеются два элементарных высказывания:

A – «Этот треугольник равнобедренный»,

B – «Этот треугольник равносторонний».

Записать высказывания, соответствующие всем логическим операциям.

**Решение.** Как следует из приведенных выше логических операций, имеем:

$A \vee B$ – «Этот треугольник равнобедренный или равносторонний».

$A \wedge B$ – «Этот треугольник равнобедренный и равносторонний».

$\overline{A}$ – «Этот треугольник не равнобедренный».

$A \rightarrow B$ – «Если этот треугольник равнобедренный, то он равносторонний».

$A \leftrightarrow B$ – «Этот треугольник равнобедренный тогда и только тогда, когда он равносторонний».

**Пример 2.** Построить истинностную таблицу следующего сложного высказывания S:

$$S=\overline{(A \rightarrow B)} \wedge C \vee (A \leftrightarrow \overline{C}).$$

26

**Решение.** Отметим, что завершающей логической операцией в решении примера будет дизъюнкция. Ниже приводим истинностную таблицу высказывания S, которая (без командной) будет состоять из $2^3$=8 строк:

| A | B | C | A→B | $\overline{(A \to B)}$ | $\overline{(A \to B)} \wedge C$ | $\overline{C}$ | $(A \leftrightarrow \overline{C})$ | **S** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| и | и | и | и | л | л | л | л | л |
| и | и | л | и | л | л | и | и | и |
| и | л | и | л | и | и | л | л | и |
| и | л | л | л | и | л | и | и | и |
| л | и | и | и | л | л | л | и | и |
| л | и | л | и | л | л | и | л | л |
| л | л | и | и | л | л | л | и | и |
| л | л | л | и | л | л | и | л | л |

**Пример 3.** Построить таблицу истинности для формулы

$$S=(A \to B) \wedge ((\bar{B} \to C) \to \bar{A}).$$

**Решение.** Соблюдая приоритеты логических операций и расставленных в формуле скобок, получаем:

| A | B | C | A→B | $\overline{B}$ | $\overline{B} \to C$ | $\overline{A}$ | $((\overline{B} \to C) \to \overline{A})$ | S |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| и | и | и | и | л | и | **л** | л | **л** |
| и | и | л | и | л | и | **л** | л | **л** |
| и | л | и | л | и | и | **л** | л | **л** |
| и | л | л | л | и | л | **л** | и | **л** |
| л | и | и | и | л | и | **и** | и | **и** |
| л | и | л | и | л | и | **и** | и | **и** |
| л | л | и | и | и | и | **и** | и | **и** |
| л | л | л | и | и | л | **и** | и | **и** |

Из построенной таблицы истинности видно, что формулы $\overline{A}$ и S равносильны.

**Задание 2:** составьте по аналогии с рассмотренными примерами задачи и решите их (7 шт.)

**Форма отчета:** отчет, защита работы.

## Практическое занятие № 2

**Тема:** Алгебра высказываний

**Цель:** получение практических навыков работы с таблицей истинности, формулами логики

**Оборудование:** ручка, тетрадь

**Задание 1:** решите задачи

**Задание.** Требуется получить высказывания $S_1$ своего варианта N и $S_2$ варианта N+3, составить для них таблицы истинности и выяснить, равносильны ли эти высказывания.

**Задача 1.** Даны следующие элементарные высказывания:

A – Сидоров сдаст экзамен;

B – Сидоров будет посещать лекции;

C – Сидоров будет заниматься самостоятельно.

Требуется записать с помощью логических операций высказывание:

| Вариант | Высказывание |
|---|---|
| 1 | Сидоров сдаст экзамен, если будет посещать лекции и заниматься самостоятельно. |
| 2 | Если Сидоров будет заниматься самостоятельно, но не станет посещать лекции, он не сдаст экзамен. |
| 3 | Сидоров сдаст экзамен тогда и только тогда, когда будет посещать лекции и заниматься самостоятельно. |
| 4 | Сидоров не сдаст экзамен, если не будет заниматься самостоятельно, даже если он будет посещать лекции. |
| 5 | Если Сидоров не сдаст экзамен, значит он не занимался самостоятельно или не посещал лекции. |
| 6 | Если Сидоров сдаст экзамен, то он посещал лекции и занимался самостоятельно. |

**Задача 2.** Даны следующие элементарные высказывания:

A – Сидоров правильно ответит на вопрос;

B – Иванов правильно ответит на вопрос;

C – Петров правильно ответит на вопрос.

Требуется записать с помощью логических операций высказывание:

| Вариант | Высказывание |
|---|---|
| 7 | Сидоров правильно ответит на вопрос, если на него правильно ответят и Иванов, и Петров. |
| 8 | Сидоров правильно ответит на вопрос, если на него ответит правильно либо Иванов, либо Петров. |
| 9 | Сидоров правильно ответит на вопрос, если на него ответит правильно Иванов, но не ответит Петров. |
| 10 | Сидоров правильно ответит на вопрос, если на него ответит правильно Петров, но не ответит Иванов. |
| 11 | Если Иванов и Петров неверно ответят на вопрос, то на него ответит правильно Сидоров. |
| 12 | Иванов правильно ответит на вопрос тогда и только тогда, когда на него ответят правильно Петров и Сидоров. |
| 13 | Сидоров неверно ответит на вопрос, если на него правильно ответит Иванов, но не ответит Петров. |
| 14 | Сидоров тогда и только тогда неверно ответит на вопрос, когда на него неверно ответит и Иванов, и Петров. |

**Задача 3.** Даны следующие элементарные высказывания:

A – Илья выполнит норматив;

B – Илья не будет пропускать тренировки;

C – Илья не будет нарушать спортивный режим.

Требуется записать с помощью логических операций высказывание:

| Вариант | Высказывание |
|---|---|
| 15 | Илья выполнит норматив, если не будет пропускать тренировки и нарушать спортивный режим. |
| 16 | Если Илья не будет пропускать тренировки, но будет нарушать спортивный режим, он не выполнит норматив. |
| 17 | Илья выполнит норматив тогда и только тогда, когда не будет пропускать тренировки и нарушать спортивный режим. |
| 18 | Илья не выполнит норматив, если будет пропускать тренировки, даже не нарушая спортивного режима. |
| 19 | Если Илья не выполнит норматив, значит он пропускал тренировки, либо нарушал спортивный режим. |

**Задача 4.** Даны следующие элементарные высказывания:

**A –** Анне понравится спектакль;

B – Ирине понравится спектакль;

C – Ольге понравится спектакль.

Требуется записать с помощью логических операций высказывание:

| Вариант | Высказывание |
|---|---|
| 20 | Анне понравится спектакль, если он понравится либо Ирине, либо Ольге. |
| 21 | Анне понравится спектакль тогда и только тогда, когда он понравится и Ирине, и Ольге. |
| 22 | Анне не понравится спектакль, если он даже понравится Ольге, но не понравится Ирине. |
| 23 | Анне не понравится спектакль, если он не понравится ни Ольге, ни Ирине. |
| 24 | Анне понравится спектакль, если даже он не понравится Ирине, но понравится Ольге |

**Задача 5.** Даны следующие элементарные высказывания:

A – Семен пойдет в турпоход;

B – Захар пойдет в турпоход;

C – Антон пойдет в турпоход.

29

Требуется записать с помощью логических операций высказывание:

| Вариант | Высказывание |
|---|---|
| 25 | Семен пойдет в турпоход, если вместе с ним пойдут и Захар, и Антон. |
| 26 | Семен пойдет в турпоход, если даже с ним не пойдет Антон, но пойдет Захар. |
| 27 | Семен не пойдет в турпоход, если вместе с ним не пойдут и Захар, и Антон. |
| 28 | Семен пойдет в турпоход тогда и только тогда, когда с ним пойдут и Захар, и Антон. |

**Задание 2:** ответьте на вопросы для самоконтроля

1. Что такое высказывание? Приведите примеры истинных и ложных высказываний.
2. Какие логические операции вы знаете? Запишите высказывания, соответствующие всем логическим операциям на примере элементарных высказываний: А – идет дождь; В – светит солнце.
3. Какой вид имеет истинностная таблица дизъюнкции?
4. Запишите таблицу истинности конъюнкции.
5. Какой вид имеет истинностная таблица импликации?
6. Запишите таблицу истинности для двойной импликации.
7. Чему равно число строк истинностной таблицы для $n$ элементарных высказываний?
8. Каков естественный порядок выполнения логических операций?
9. Дайте определение формулы алгебры высказываний.
10. Какие две формулы алгебры высказываний называются равносильными?

**Форма отчета:** отчет, защита работы.

## Практическое занятие № 3

**Тема:** Алгебра высказываний

**Цель:** получение практических навыков работы с законами алгебры логики, равносильными преобразованиями

**Оборудование:** ручка, тетрадь

**Задание 1:** выполните задания в практической работе 1 и 2 с помощью равносильных преобразований, сверьте ответы.

**Форма отчета:** отчет, защита работы.

## Практическое занятие № 4

**Тема:** Булевы функции

**Цель:** научить вычислять ДНФ, КНФ функции

**Оборудование:** ручка, тетрадь

**Задание 1:** рассмотрите примеры

**Пример 1.** Представить функцию $f = (x \sim y) \cdot z$ в совершенной дизъюнктивной нормальной форме.

**Решение.** Составим таблицу истинности для данной функции:

| $x$ | $y$ | $z$ | $x \sim y$ | $(x \sim y) \cdot z$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Из таблицы истинности видно, что функция принимает значение 1 на двух наборах 001 и 111. Тогда ее аналитическое представление в СДНФ примет вид

$$f = \bar{A}\bar{B}C + ABC$$

**Пример 2.** Представить функцию $f = x + y\bar{z}$ в совершенной конъюнктивной нормальной форме.

**Решение.** Составим таблицу истинности для данной функции:

| $x$ | $y$ | $z$ | $y\bar{z}$ | $x + y\bar{z}$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |

Из таблицы истинности видно, что функция принимает значение 0 на трех наборах 000, 001 и 011. Тогда аналитическое выражение для $\bar{f}$ будет:

$$\bar{f} = \bar{x}\bar{y}\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}yz.$$

Инвертируем по теореме де Моргана:

$$f = \bar{\bar{f}} = \overline{\bar{x}\bar{y}\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}yz} = (x + y + z)(x + y + \bar{z})(x + \bar{y} + \bar{z}).$$

Это и есть искомая СКНФ заданной функции $f$.

**Задание 2:** составьте по аналогии с рассмотренными примерами задачи и решите их (7 шт.)

**Форма отчета:** отчет, защита работы.

## Практическое занятие№ 5

**Тема:** Булевы функции

**Цель:** отработать навыки по упрощению формул.

**Оборудование:** ручка, тетрадь

**Задание 1:** решите задачи

**Задача 1.** Представить функцию $f$ в совершенной дизъюнктивной нормальной форме.

| **Вариант** | **Функция $f$** | **Вариант** | **Функция $f$** |
|---|---|---|---|
| 1 | $x\bar{y} + xz$ | 8 | $\overline{x + y} \sim z$ |
| 2 | $(x + \bar{y}) \sim z$ | 9 | $(x \oplus y) \cdot \bar{z}$ |
| 3 | $(x \oplus y)z$ | 10 | $x\bar{y} + x\bar{z}$ |
| 4 | $yz + \bar{x}z$ | 11 | $(x \mid y) \cdot z$ |
| 5 | $(x \sim y)z$ | 12 | $\bar{y}z + xz$ |
| 6 | $(x \mid z) \cdot \bar{y}$ | 13 | $(x \mid z) \cdot y$ |
| 7 | $x\bar{y} + \bar{x}z$ | 14 | $yz + x\bar{z}$ |

**Задача 2.** Представить функцию $f$ в совершенной конъюнктивной нормальной форме.

| Вариант | Функция $f$ | Вариант | Функция $f$ |
|---|---|---|---|
| 15 | $z \to x\bar{y}$ | 22 | $(x \oplus y) \to z$ |
| 16 | $(x + \bar{y}) \sim z$ | 23 | $\bar{z} + (x \sim y)$ |
| 17 | $x\bar{y} + \bar{x}z$ | 24 | $(x \mid y) \to z$ |
| 18 | $\overline{x + y} \sim z$ | 25 | $(x + \bar{y}) \mid z$ |
| 19 | $\overline{xy} \to z$ | 26 | $xy \to \bar{y}z$ |
| 20 | $z \to (x \oplus y)$ | 27 | $\bar{z} \to (x \oplus y)$ |
| 21 | $(x \sim y) + z$ | 28 | $(x + \bar{y}) \to z$ |

**Задача 2:** ответьте на вопросы для самоконтроля

1. Какими аксиомами определяется дизъюнкция или логическое сложение?
2. Какими аксиомами определяется конъюнкция или логическое умножение?
3. Какими аксиомами определяется инверсия или логическое отрицание?
4. Назовите основные свойства дизъюнкции.
5. Запишите основные свойства конъюнкции.
6. Перечислите теоремы одной переменной.
7. Что такое дизъюнктивная нормальная форма? Приведите пример.
8. Что такое конъюнктивная нормальная форма? Приведите пример.
9. Запишите теоремы поглощения.
10. Запишите теоремы склеивания.
11. Вспомните теоремы де Моргана.
12. Что такое булевы функции и как их можно задать?
13. Вспомните элементарные булевы функции.
14. Что такое минтерм и как представить функцию в совершенной дизъюнктивной нормальной форме?
15. Что такое макстерм и как представить функцию в совершенной конъюнктивной нормальной форме?

**Форма отчета:** отчет, защита работы.

## Практическое занятие № 6

**Тема:** Основы теории множеств
**Цель:** отработать навыки по операциям над множествами
**Оборудование:** ручка, тетрадь
**Задание 1:** рассмотрите примеры

**Пример 1.1.** Пусть A = {1, 3, 5, 8}, B = {2, 3, 8, 10}, C = {3, 9, 10}. Перечислить все элементы следующих множеств:

a) $A\cap B\cup B\cap C = D$, b) $(A\cup C)\setminus(B\cap A) = E$.

Решение. Из определений операций над множествами и порядка выполнения этих операций имеем:

a) $A\cap B = \{3,8\}$, $B\cap C = \{3,10\} \Rightarrow D = \{3,8,10\}$;

b) $A\cup C = \{1,3,5,8,9,10\}$, $B\cap A = \{3,8\} \Rightarrow E = \{1,5,9,10\}$.

**Пример 1.2.** Пусть множество A состоит из точек M(x, y) плоскости, для которых $|x| \le 3$ и $|y| \le 5$, множество B – из точек плоскости, для которых $x^2 + y^2 \le 25$, множество C – из точек плоскости, для которых $x < 0$. Требуется изобразить множество $A\cap B\setminus C$.

Решение. По условию множество A представляет собой прямоугольник с центром симметрии в начале системы координат, множество B – круг радиуса 5 с центром тоже в начале системы координат, множество C – левую полуплоскость

**Задание 2:** составьте по аналогии с рассмотренными примерами задачи и решите их (7 шт.)



координатной плоскости xOy. Тогда $A\cap B$ – «обрезанный» прямоугольник KLST, $A\cap B\setminus C$ – множество точек, полученное удалением из $A\cap B$ точек полуплоскости $x < 0$. Искомое множество затонировано на рис. 1. 3.

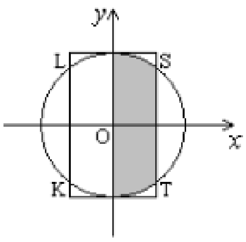



Рис. 1.3.

**Пример 1.3.** Доказать, что $A\setminus B = A\cap\overline{B}$.

Решение. Произвольный элемент $x\in A\setminus B \Leftrightarrow x\in A$ и $x\notin B \Leftrightarrow x\in A$ и $x\in\overline{B} \Leftrightarrow x\in A\cap\overline{B}$. Доказательство завершено.

**Пример 1.4.** Упростить выражение $\overline{\overline{A\cap\overline{\overline{B}}}\cup A\cap B\cap\overline{C}}$.

Решение. $\overline{\overline{A\cap\overline{\overline{B}}}\cup A\cap B\cap\overline{C}}$ = (по законам де Моргана) = $\overline{\overline{A\cap\overline{\overline{B}}}}\cap\overline{A\cap B\cap\overline{C}}$ = (снова дважды применяем законы де Моргана, закон двойного отрицания и другие законы) = $A\cap\overline{B}\cap\overline{A\cap B}\cup\overline{\overline{C}} = A\cap\overline{B}\cap(\overline{A}\cup\overline{B}\cup C) =$

$= A\cap\overline{B}\cap\overline{A}\cup A\cap\overline{B}\cap\overline{B}\cup A\cap\overline{B}\cap C = A\cap\overline{A}\cap\overline{B}\cup A\cap\overline{B}\cup A\cap\overline{B}\cap C =$

$= \varnothing\cup A\cap\overline{B} = A\cap\overline{B}$.

Итак, $\overline{\overline{A\cap\overline{\overline{B}}}\cup A\cap B\cap\overline{C}} = A\cap\overline{B}$.

**Пример 1.5.** Пусть A = {1, 2}, B = {3, 4}. Перечислить все элементы множеств $A\times B$, $B\times A$, $A^2$.

Решение. $A\times B$ = {(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)}, $B\times A$ = {(3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2)}, $A^2 = A\times A$ = {(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)}.

**Пример 1.6.** Пусть $A = \{x \mid x\in[0,1]\}$. Требуется изобразить множество $A^2$.

Решение. $A^2 = \{(x, y) \mid 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\}$. Этому множеству соответствует множество точек на плоскости, имеющих неотрицательные координаты, не превосходящие единицы (рис. 1. 4).

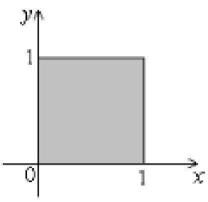



Рис. 1.4.

**Пример 1.7.** Пусть $X = \{a, b, c, d\}$, $Y = \{1, 4, 8\}$. Рассмотрим отображения $f_1 : X \to Y$, $f_2 : X \to Y$:

$$f_1 : a \to 1, \quad b \to 4, \quad c \to 8, \quad d \to 8 \qquad f_2 : 1 \to b, \quad 4 \to c, \quad 8 \to d.$$

Определить, являются ли эти отображения инъективными и сюръективными.

Решение. Имеем

$$f_1(a) = 1, \quad f_1^{-1}(1) = \{a\}, \quad f_2(1) = b, \quad f_2^{-1}(b) = \{1\},$$

$$f_1(b) = 4, \quad f_1^{-1}(4) = \{b\}, \quad f_2(4) = c, \quad f_2^{-1}(c) = \{4\},$$

$$f_1(c) = f_1(d) = 8, \quad f_1^{-1}(8) = \{c, d\}, \quad f_2(8) = d, \quad f_2^{-1}(d) = \{8\}, f_2^{-1}(a) = \varnothing.$$

Образы $f_1(c)$, $f_1(d)$ элементов c, d совпадают, поэтому отображение $f_1 : X \to Y$ не является инъективным. Для каждого элемента множества Y существует элемент множества X, образом которого при отображении $f_1 : X \to Y$ является этот элемент множества Y, поэтому отображение $f_1 : X \to Y$ является сюръективным. Так как образы любых двух различных элементов множества Y при отображении $f_2 : Y \to X$ различны, то это отображение является инъективным. В множестве Y не существует элемента, образом которого при отображении $f_2 : Y \to X$ является элемент a множества X, поэтому последнее отображение не является сюръективным.

**Задание 2:** составьте по аналогии с рассмотренными примеры индивидуальные задачи и решите их (7 шт.)

**Форма отчета:** отчет, защита работы.

## Практическое занятие № 7

**Тема:** Основы теории множеств

**Цель:** отработать навыки по операциям над множествами

**Оборудование:** ручка, тетрадь

**Задание 1:**

1. Пусть $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, множества A, B, C, D заданы в табл. 1. Перечислить все элементы множества D.

Таблица 1

| Вариант | Множества |
|---|---|
| 1 | $A = \{1, 4, 5, 7, 8\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, $C = \{1, 9\}$, $D = ((A \cup C) \setminus (\overline{A} \cap B)) \times C$ |
| 2 | $A = \{2, 5, 6\}$, $B = \{1, 3, 5, 6, 8\}$, $C = \{1, 4\}$, $D = C \times ((A \cap B) \setminus (C \cup \overline{B}))$ |
| 3 | $A = \{1, 3, 4, 6, 7\}$, $B = \{1, 2, 4\}$, $C = \{1, 8, 10\}$, $D = ((\overline{A} \cap C) \setminus (B \cup A)) \times B$ |
| 4 | $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 9, 10\}$, $B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $C = \{1, 2, 3\}$, $D = \overline{A} \times ((\overline{B} \cup C) \setminus (A \cap C))$ |
| 5 | $A = \{2, 5, 6, 8, 9\}$, $B = \{3, 4, 5\}$, $C = \{2, 10\}$, $D = ((A \cup C) \setminus (\overline{A} \cap B)) \times C$ |
| 6 | $A = \{3, 6, 7\}$, $B = \{2, 4, 6, 7, 9\}$, $C = \{2, 5\}$. $D = C \times ((A \cap B) \setminus (C \cup \overline{B}))$ |

| Вариант | Множества |
|---|---|
| 7 | $A = \{2, 4, 5, 7, 8\}$, $B = \{2, 3, 5\}$, $C = \{1, 2, 9\}$,<br>$D = ((A \cap C) \setminus (\overline{B \cup A})) \times B$ |
| 8 | $A = \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 10\}$, $B = \{1, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $C = \{2, 3, 4\}$,<br>$D = \overline{A} \times ((\overline{B} \cup C) \setminus (A \cap C))$ |
| 9 | $A = \{3, 6, 7, 9, 10\}$, $B = \{4, 5, 6\}$, $C = \{1, 3\}$,<br>$D = ((A \cup C) \setminus (\overline{A} \cap B)) \times C$ |
| 10 | $A = \{4, 7, 8\}$, $B = \{3, 5, 7, 8, 10\}$, $C = \{3, 6\}$,<br>$D = C \times ((A \cap B) \setminus (C \cup \overline{B}))$ |
| 11 | $A = \{3, 5, 6, 8, 9\}$, $B = \{3, 4, 6\}$, $C = \{2, 3, 10\}$,<br>$D = ((A \cap C) \setminus (\overline{B \cup A})) \times B$ |
| 12 | $A = \{1, 2, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $B = \{1, 2, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $C = \{3, 4, 5\}$,<br>$D = \overline{A} \times ((\overline{B} \cup C) \setminus (A \cap C))$ |
| 13 | $A = \{1, 4, 7, 8, 10\}$, $B = \{5, 6, 7\}$, $C = \{2, 4\}$,<br>$D = ((A \cup C) \setminus (\overline{A} \cap B)) \times C$ |
| 14 | $A = \{5, 8, 9\}$, $B = \{1, 4, 6, 8, 9\}$, $C = \{4,7\}$,<br>$D = C \times ((A \cap B) \setminus (C \cup \overline{B}))$ |
| 15 | $A = \{4, 6, 7, 9, 10\}$, $B = \{4, 5, 7\}$, $C = \{1, 3, 4\}$,<br>$D = ((\overline{A} \cap C) \setminus (B \cup A)) \times B$ |
| 16 | $A = \{2, 3, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $B = \{1, 2, 3, 6, 8, 9, 10\}$, $C = \{4, 5, 6\}$,<br>$D = \overline{A} \times ((\overline{B} \cup C) \setminus (A \cap C))$ |
| 17 | $A = \{1, 2, 5, 8, 9\}$, $B = \{6, 7, 8\}$, $C = \{3, 5\}$,<br>$D = ((A \cup C) \setminus (\overline{A} \cap B)) \times C$ |
| 18 | $A = \{6, 9, 10\}$, $B = \{2, 5, 7, 9, 10\}$, $C = \{5, 8\}$,<br>$D = C \times ((A \cap B) \setminus (C \cup \overline{B}))$ |
| 19 | $A = \{1, 5, 7, 8, 10\}$, $B = \{5, 6, 8\}$, $C = \{2, 4, 5\}$,<br>$D = ((A \cap C) \setminus (\overline{B \cup A})) \times B$ |
| 20 | $A = \{3, 4, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 7, 9, 10\}$, $C = \{5, 6, 7\}$,<br>$D = \overline{A} \times ((\overline{B} \cup C) \setminus (A \cap C))$ |
| 21 | $A = \{2, 3, 6, 9, 10\}$, $B = \{7, 8, 9\}$, $C = \{4, 6\}$,<br>$D = ((A \cup C) \setminus (\overline{A} \cap B)) \times C$ |
| 22 | $A = \{1, 7, 10\}$, $B = \{1, 3, 6, 8, 10\}$, $C = \{6, 9\}$,<br>$D = C \times ((A \cap B) \setminus (C \cup \overline{B}))$ |
| 23 | $A = \{1, 2, 6, 8, 9\}$, $B = \{6, 7, 9\}$, $C = \{3, 5, 6\}$,<br>$D = ((A \cap C) \setminus (\overline{B \cup A})) \times B$ |
| 24 | $A = \{1, 4, 5, 7, 8, 9, 10\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 8, 10\}$, $C = \{6, 7, 8\}$,<br>$D = \overline{A} \times ((\overline{B} \cup C) \setminus (A \cap C))$ |
| 25 | $A = \{1, 3, 4, 7, 10\}$, $B = \{8, 9, 10\}$, $C = \{5, 7\}$,<br>$D = ((A \cup C) \setminus (\overline{A} \cap B)) \times C$ |

2. Преобразовать выражение, заданное в табл. 2.

Таблица 2

| Вариант | Выражение |
|---|---|
| 1 | $(A\setminus B)\cup(A\cap B)$ |
| 2 | $\overline{(A\cap B)}\setminus(A\setminus B)$ |
| 3 | $\overline{(A\cup B)}\setminus B$ |
| 4 | $(B\setminus A)\cup(A\cap B)$ |
| 5 | $\overline{(A\cup B)}\setminus\overline{B}$ |
| 6 | $\overline{(A\cup B)}\setminus A$ |
| 7 | $\overline{(A\cup B)}\setminus\overline{A}$ |
| 8 | $A\setminus(A\cup B)$ |
| 9 | $B\setminus(A\cup B)$ |
| 10 | $\overline{A}\setminus(A\cup B)$ |
| 11 | $\overline{B}\setminus(A\cup B)$ |
| 12 | $(A\setminus B)\setminus(A\cup B)$ |
| 13 | $(A\setminus B)\setminus(A\cap B)$ |
| 14 | $(A\setminus B)\setminus\overline{(A\cap B)}$ |
| 15 | $(A\setminus B)\setminus\overline{(A\cup B)}$ |
| 16 | $(A\setminus B)\cap(B\setminus A)$ |
| 17 | $(A\setminus B)\cap\overline{(B\setminus A)}$ |
| 18 | $\overline{(A\setminus B)}\cap(B\setminus A)$ |
| 19 | $(A\setminus B)\cup(B\setminus\overline{A})$ |
| 20 | $(A\setminus B)\cup(\overline{B}\setminus A)$ |
| 21 | $\overline{(A\cap B)}\cap\overline{(B\setminus A)}$ |
| 22 | $(A\cap B)\cap\overline{(B\setminus A)}$ |
| 23 | $(A\cup B)\cap\overline{(B\setminus A)}$ |
| 24 | $\overline{(A\cap B)}\cup\overline{(B\setminus A)}$ |
| 25 | $\overline{(A\cap B)}\cup(B\setminus A)$ |

**Задание 2:** ответьте на вопросы для самоконтроля

1. Дайте определения конечного и счетного множеств.
2. Дайте определения подмножества, равенства множеств, пустого множества, собственного подмножества, несобственного подмножества, универсального множества.
3. Дайте определения объединения, пересечения, разности множеств, дополнения множества, проиллюстрируйте их диаграммами Эйлера – Венна.
4. Укажите основные свойства операций над множествами.

14

5. Дайте определения декартова произведения множеств, декартовой степени множества.
6. Дайте определение симметрической разности множеств, проиллюстрируйте его диаграммой Эйлера – Венна.
7. Дайте определения отображения, образа элемента, прообраза элемента, образа множества, прообраза множества.
8. Дайте определения инъективного, сюръективного, биективного отображений.
9. Даны множества $A = \{2, 3, 4, 8\}$, $B = \{1, 2, 8, 12\}$, $C = \{1, 8, 9\}$, $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$. Перечислите все элементы следующих множеств:
   1) $D = (A\cup C)\setminus(B\cap\overline{A})$;
   2) $E = (A\cap B\cup B\cap C)\times D$.
10. Используя свойства операций над множествами, преобразуйте выражения:
   1) $(A\setminus B)\cap B$;
   2) $(A\setminus B)\cap(A\cup B)$;
   3) $\overline{(A\cap B)}\cap\overline{(B\setminus A)}$.
11. Факультативный курс по математике посещают 20 студентов, а по физике – 30 студентов. Найдите число студентов, посещающих факультатив по математике или физике, если:
   1) факультативные занятия проходят в одно и то же время;
   2) факультативные занятия проходят в разные часы и 10 студентов посещают оба факультатива.
12. Пусть $X = \{a, b, c, d\}$. Рассмотрим отображение $f : X \to X \ : \ a \to b$, $b \to c$, $c \to d$, $d \to a$. Определите, является ли оно биективным.

**Форма отчета:** отчет, защита работы.

## Практическое занятие №8

**Тема:** Основы теории множеств

**Цель:** отработать навыки решения задач с помощью кругов Эйлера - Венна

**Оборудование:** ручка, тетрадь

**Задание 1:** изучите теоретический материал

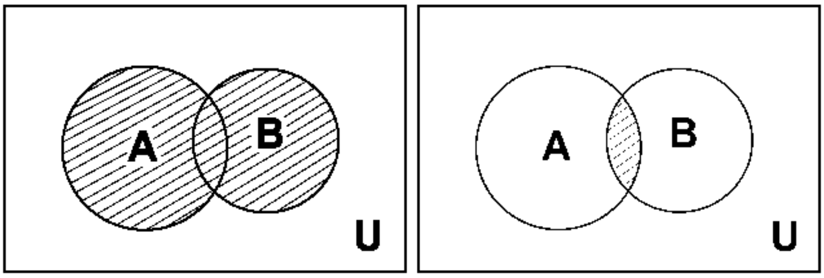
***Объединением*** (суммой) двух множеств А и В называется множество вида:

$A \cup B = \{a \mid a \in A$ или $a \in B\}$ (рис. 1.2, а).

***Пересечением*** двух множеств А и В называется множество вида:

$A \cap B = \{a \mid a \in A$ и $a \in B\}$ (рис. 1.2, б).

Если множества А и В не имеют общих элементов, то $A \cap B = \varnothing$.




*Правило сложения.* Из двух множеств, содержащих n и m элементов соответственно, выбрать один элемент можно n+m способами, если множества не пересекаются и n+m-k способами, если эти множества имеют k общих элементов.

Число элементов объединения множеств А и В, содержащих nи m элементов соответственно, равно n+m-k, где k- количество общих элементов. Если множества не пересекаются, то k=0.

**Если число элементов множества** $M$ **обозначить** $|M|$, то кол-во элементов объединения (суммы) можно найти по формуле $|A+B| = |A| + |B| - |AB|$, где $|AB|$ - количество общих элементов.

Если множеств три, то $|A+B+C| = |A| + |B| + |C| - |AB| - |AC| - |BC| + |ABC| =$

$|A+B+C| = |U| - |\bar{A}\bar{B}\bar{C}|$, где $U$ -универсальное множество.

Если число элементов множества $M$ обозначить $|M|$, то кол-во элементов объединения (суммы) можно найти по формуле $|A+B| = |A| + |B| - |AB|$, где $|AB|$ - количество общих элементов.

Если множеств три, то $|A+B+C| = |A| + |B| + |C| - |AB| - |AC| - |BC| + |ABC| =$

$|A+B+C| = |U| - |\bar{A}\bar{B}\bar{C}|$, где $U$ -универсальное множество.

Задача. В группе из 29 человек по результатам опроса оказалось, что 20 человек увлекаются музыкой, а 15 человек увлекаются танцами. Сколько человек увлекаются музыкой и танцами, если 6 человек ответили, что не увлекаются ничем?

**Решение.**

В данной задаче универсальное множество U – это все, кто состоит в группе. По условию задачи его мощность равна 25.

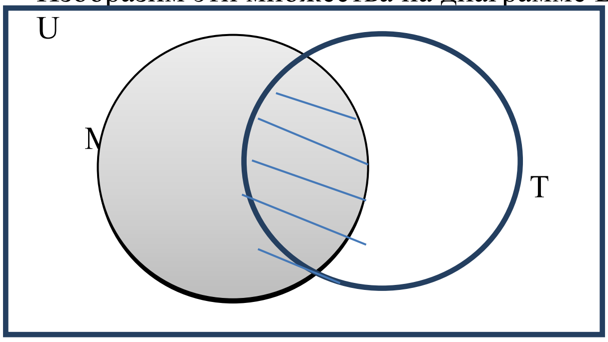
Пусть $M$ – множество людей из данной группы, увлекающихся музыкой. Тогда по условию задачи его мощность равна 20.

$T$ – множество тех, кто увлекается танцами. Тогда по условию его мощность равна 15.

Тогда $M \cap T = A$ - множество тех, кто увлекается музыкой и танцами одновременно, а $M \cup T$ - это множество тех, кто увлекается танцами или музыкой, или и тем, и другим одновременно.

Тогда множество $\overline{M \cup T}$ - это те люди, которые не увлекаются ничем, по условию задачи мощность этого множества равна 6.

Изобразим эти множества на диаграмме Венна:




Заштриховано множество $M \cap T = A$ - множество тех, кто увлекается музыкой и танцами.

Что бы найти количество элементов множества $M \cup T$ нужно из суммы мощностей множеств M и T вычесть мощность их пересечения $M \cap T = A$. Мощность универсального множества U равна сумме мощностей множества $M \cup T$ и множества $\overline{M \cup T}$. Пусть множество $M \cap T = A$ содержит х элементов, тогда $29 = 6 + 20 + 15 - x$.

Отсюда x=12. Следовательно, множество $M \cap T = A$ должно содержать 12 элементов. Количество увлекающихся музыкой и танцами одновременно 12 человек.

## Задание 2:

**Решить задачи и изобразить на диаграмме Венна.**

1. На 20 % компьютеров компании установлена операционная система Microsoft Windows XP , на 85 % компьютеров установлена Microsoft Windows 7, на 10 % установлена операционная система Linux. Одновременно Linux и Microsoft Windows 7 установлены на 6% компьютеров, Microsoft Windows XP и Linux на 4% , все три программы установлены на 2% компьютеров. На скольких процентах компьютеров установлена операционная система Microsoft?
2. Каждый студент в группе сдает экзамен либо по высшей математике, либо по математической логике, либо по обоим предметам. По высшей математике сдают экзамен 15 человек, а по мат. логике - 19, а тот и другой предмет – 7 студентов. Сколько студентов в группе?
3. В торговый центр “Форум” пришло 100 покупателей. Диск Николая Баскова купило 20 человек, диск Стаса Михайлова купило 64 человек, причем 11 человек купило диски этих двух исполнителей. Сколько человек не купило диски этих исполнителей?
4. Несколько футбольных болельщиков соседнего дома выписывают журнал “Наш футбол”, часть жителей этого дома выписывают известный автомобильный журнал “Top Gear”, а часть тот, и тот журнал. Сколько жителей соседнего дома выписывают оба журнала, если на “Наш Футбол” подписано 64 процента, а на “Top Gear” – 84 процента?
5. Первый и второй зачет по Русскому языку сдали 9 школьников, первый и третий зачет – 6 школьников, второй и третий - 7 школьников. Не менее двух зачетов выполнили 10 школьников. Сколько школьников успешно сдали все три зачета?
6. В кондитерском отделе супермаркета посетители обычно покупают либо один торт, либо одну коробку конфет, либо один торт и одну коробку конфет. В один из дней было продано 57 тортов и 36 коробок конфет. Сколько было покупателей, если 12 человек купили и торт, и коробку конфет?

7. В Хоккейной команде "Звезда" 24 игрока. Среди них 13 нападающих. 7 полузащитников, 10 защитники и вратари. Известно, что 4 из игроков могут быть нападающими и защитниками, 5 защитниками и полузащитниками, 7 нападающими и защитниками, а 2 и нападающими и защитником, и полузащитником. Вратари не заменимы. Сколько в команде "Звезда" вратарей?
8. В магазин «Мир музыки» пришло 35 покупателей. Из них 20 человек купили новый диск певицы Максим, 11 – диск Земфиры, 10 человек не купили ни одного диска. Сколько человек купили диски и Максим, и Земфиры?
9. На полке стояло 42 волшебные книги по заклинаниям, все они были прочитаны. Из них 5 прочитали и Гарри Поттер, и Рон. Гермиона прочитала 27 книг, которых не читали ни Гарри Поттер, ни Рон, и 6 книг, которые читал Гарри Поттер. 4 книги прочитали и Рон, и Гермиона. 2 книги прочитали все трое. Всего Гарри Поттер прочитал 11 книг. Сколько книг прочитал только Рон?
10. В магазине побывало 36 человек. Известно, что они купил 10 планшетов, 15 смартфонов, 23 телевизора. 7 из них купило и планшет, и смартфон, 15 человек купили и смартфон, и телевизор, 6 человек – и планшет, и телевизор. И 5 человек совершили все три покупки. Был ли среди них посетитель, который ничего не купил?
11. В офисе работает 119 человек. 25 человек приезжает только на личном авто. Автобусом пользуется 27 человек, троллейбусом 43, метро 36, причем, четверо из них пользуются и метро и автобусом, 5 человек - троллейбусом и метро, 6 человек - автобусом и троллейбусом. Часть из них пользуются троллейбусом, метро и автобусом. Сколько человек пользуется не одним видом транспорта?
12. Из 100 туристов отправляющихся на зимний курорт, на сноуборде умеют кататься 30 человек, на лыжах – 28 и на коньках – 42 человека. На сноуборде и лыжах умеют кататься 8 человек, на лыжах и на коньках – 5 человек, на сноуборде и коньках 4 человека. На всех трех – трое. Сколько человек вообще не умеет кататься?
13. Каждый из 35 шестиклассников является читателем, по крайней мере, одной из двух библиотек: школьной и районной. Причем, 25 человек из них берут книги в школьной библиотеке, 20 человек берут книги в районной библиотеке. Сколько шестиклассников: 1)не являются читателями районной библиотеки; 2) не являются читателями школьной библиотеки; 3) являются читателями только районной библиотеки; 3) являются читателями только школьной библиотеки? 4) являются читателями обеих библиотек?
14. Из сотрудников фирмы 16 побывали во Франции, 10-в Италии, 6-в Англии; в Англии и Италии -5; в Англии и Франции - 6; во всех трех странах - 5 сотрудников. Сколько человек посетили и Италию, и Францию, если всего в фирме работают 19 человек, и каждый из них побывал хотя бы в одной из названных стран?
15. В трёх группах 70 студентов. Из них 27 занимаются в драмкружке, 32 поют в хоре, 22 увлекаются спортом. В драмкружке 10 студентов из хора, в хоре 6 спортсменов, в драмкружке 8 спортсменов; 3 спортсмена посещают и драмкружок и хор. Сколько студентов не поют в хоре, не увлекаются спортом и не занимаются в драмкружке? Сколько студентов заняты только спортом?

**Форма отчета:** отчет, защита работы.

## Практическое занятие № 9

**Тема:** Основы теории множеств

**Цель:** отработать навыки по бинарным отношениям и их свойствам распределения ДСВ

**Оборудование:** ручка, тетрадь

**Задание 1:**

1. Перечислить все элементы бинарного отношения P на паре множеств A, B:

$$P = \{(a, b) \mid a > b, a \in A, b \in B\}.$$

2. Составить матрицу бинарного отношения F на множестве A. Определить, является ли данное отношение рефлексивным, антирефлексивным, симметричным, антисимметричным, транзитивным.

Множества A, B и бинарное отношение F заданы в табл. 3.

Таблица 3

| Вариант | Множества A, B, бинарное отношение F |
|---|---|
| 1 | A = {2, 3, 5, 7}, B = {1, 2, 4, 6, 7, 8},<br>F = {(3, 5), (3, 7), (5, 3), (7, 3)} |
| 2 | A = {1, 2, 4, 5}, B = {1, 3, 4, 6, 8, 9},<br>F = {(1, 1), (1, 4), (2, 2), (2, 5), (4, 4), (5, 5)} |
| 3 | A = {3, 4, 5, 6}, B = {2, 3, 4, 5, 6, 7},<br>F = {(3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 4), (4, 6), (5, 5), (6, 4), (6, 6)} |
| 4 | A = {4, 5, 6, 7}, B = {2, 3, 6, 8, 10, 12},<br>F = {(4, 4), (4, 6), (5, 5), (5, 7), (6, 4), (6, 6), (7, 5), (7, 7)} |
| 5 | A = {1, 2, 5, 6}, B = {2, 4, 6, 8, 9, 10},<br>F = {(2, 2), (2, 5), (2, 6), (5, 2), (5, 5), (5, 6), (6, 2), (6, 5), (6, 6)} |
| 6 | A = {5, 6, 7, 9}, B = {4, 5, 6, 7, 8, 9},<br>F = {(5, 5), (5, 6), (5, 7), (5, 9), (6, 6), (7, 7), (9, 9)} |
| 7 | A = {1, 3, 4, 6}, B = {1, 2, 4, 5, 7, 8},<br>F = {(1, 3), (1, 4), (3, 6), (4, 3), (4, 6), (6, 1)} |
| 8 | A = {1, 2, 3, 4}, B = {2, 3, 5, 7, 8, 9},<br>F = {(1, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 4)} |
| 9 | A = {2, 3, 5, 6}, B = {1, 3, 5, 7, 8, 9},<br>F = {(2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3), (5, 5), (5, 6), (6, 5), (6, 6)} |
| 10 | A = {3, 4, 6, 8}, B = {2, 3, 5, 7, 8, 9},<br>F = {(4, 6), (4, 8), (6, 4), (8, 4)} |
| 11 | A = {2, 3, 5, 6}, B = {2, 4, 5, 7, 9, 10},<br>F = {(2, 2), (2, 5), (3, 3), (3, 6), (5, 5), (6, 6)} |
| 12 | A = {4, 5, 6, 7}, B = {3, 4, 5, 6, 7, 8},<br>F = {(4, 4), (4, 5), (5, 4), (5, 5), (5, 7), (6, 6), (7, 5), (7, 7)} |
| 13 | A = {5, 6, 7, 8}, B = {3, 4, 7, 9, 11, 13},<br>F = {(5, 5), (5, 7), (6, 6), (6, 8), (7, 5), (7, 7), (8, 6), (8, 8)} |
| 14 | A = {2, 3, 6, 7}, B = {3, 5, 7, 9, 10, 11},<br>F = {(3, 3), (3, 6), (3, 7), (6, 3), (6, 6), (6, 7), (7, 3), (7, 6), (7, 7)} |
| 15 | A = {6, 7, 8, 10}, B = {5, 6, 7, 8, 9, 10},<br>F = {(6, 6), (6, 7), (6, 8), (6, 10), (7, 7), (8, 8), (10, 10)} |
| 16 | A = {2, 4, 5, 7}, B = {2, 3, 5, 6, 8, 9},<br>F = {(2, 4), (2, 5), (4, 7), (5, 4), (5, 7), (7, 2)} |
| 17 | A = {2, 3, 4, 5}, B = {3, 4, 6, 8, 9, 10},<br>F = {(2, 3), (4, 4), (4, 5), (5, 4), (5, 5)} |

21

| Вариант | Множества A, B, бинарное отношение F |
|---|---|
| 18 | A = {3, 4, 6, 7}, B = {2, 4, 6, 8, 9, 10},<br>F = {(3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 4), (6, 6), (6, 7), (7, 6), (7, 7)} |
| 19 | A = {4, 5, 7, 9}, B = {3, 4, 6, 8, 9, 10},<br>F = {(5, 7), (5, 9), (7, 5), (9, 5)} |
| 20 | A = {3, 4, 6, 7}, B = {3, 5, 6, 8, 10, 11},<br>F = {(3, 3), (3, 6), (4, 4), (4, 7), (6, 6), (7, 7)} |
| 21 | A = {5, 6, 7, 8}, B = {4, 5, 6, 7, 8, 9},<br>F = {(5, 5), (5, 6), (6, 5), (6, 6), (6, 8), (7, 7), (8, 6), (8, 8)} |
| 22 | A = {6, 7, 8, 9}, B = {4, 5, 8, 10, 12, 14},<br>F = {(6, 6), (6, 8), (7, 7), (7, 9), (8, 6), (8, 8), (9, 7), (9, 9)} |
| 23 | A = {3, 4, 7, 8}, B = {4, 6, 8, 10, 11, 12},<br>F = {(4, 4), (4, 7), (4, 8), (7, 4), (7, 7), (7, 8), (8, 4), (8, 7), (8, 8)} |
| 24 | A = {7, 8, 9, 11}, B = {6, 7, 8, 9, 10, 11},<br>F = {(7, 7), (7, 8), (7, 9), (7, 11), (8, 8), (9, 9), (11, 11)} |
| 25 | A = {3, 5, 6, 8}, B = {3, 4, 6, 7, 9, 10},<br>F = {(3, 5), (3, 6), (5, 8), (6, 5), (6, 8), (8, 3)} |

**Задание 2:** ответьте на вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение бинарного отношения между элементами множеств А и В, определение бинарного отношения на множестве А.
2. Дайте определение матрицы бинарного отношения между элементами конечных множеств.
3. Дайте определение произведения (композиции) бинарных отношений.
4. Изложите способ нахождения матрицы композиции $P \circ P$ для бинарного отношения Р на конечном множестве А.
5. Дайте определения рефлексивного, антирефлексивного, симметричного, антисимметричного, транзитивного бинарных отношений.
6. Какой вид матрицы бинарного отношения соответствует: рефлексивному, антирефлексивному, симметричному, антисимметричному бинарным отношениям?
7. Изложите способ определения транзитивности бинарного отношения на конечном множестве.
8. Дайте определения диагонали, отношения эквивалентности.
9. Дайте определения отношений частичного порядка, строгого порядка, линейного порядка.
10. Приведите пример бинарного отношения, которое не является рефлексивным и не является антирефлексивным.
11. Приведите пример бинарного отношения, которое не является симметричным и не является антисимметричным.
12. Приведите пример бинарного отношения, которое не является транзитивным.

**Форма отчета:** отчет, защита работы.

## Практическое занятие № 10

**Тема:** Основы теории множеств

**Цель:** отработать навыки решения задач по теории отображений и алгебре подстановок

**Оборудование:** ручка, тетрадь

**Задание 1:** изучите теоретический материал

***Бинарной операцией*** на множестве А называется любое отображение σ декартова квадрата множества А в себя, т. е. $\sigma: A \times A \to A$.

Иначе говоря, любой паре *(a,b)*, принадлежащей $A^2$, ставится в соответствие единственный элемент *c* из А. Обозначают $a\,\sigma\, b=c$.

Пусть М – конечное множество $\{a_1, a_2, \dots a_n\}$. Любую биекцию удобно задавать следующей таблицей:

$$\sigma = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \sigma(a_1) & \sigma(a_2) & \dots & \sigma(a_n) \end{pmatrix}.$$

Такая таблица называется ***подстановкой степени n*** множества М.

Часто М записывают в виде номеров, если оно конечно, т.е. $M=\{1,2,\dots,n\}$. Тогда

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Если аргументы расположены в порядке возрастания, запись подстановки такого вида называют ***канонической*** и записывают $\sigma=(\sigma_1, \sigma_2, \dots\sigma_n)$. Переставляя столбцы (при этом сама подстановка не меняется), можно верхнюю строку привести к упорядоченному виду.

Число подстановок *n*-ой степени определяется формулой $|S_n|=n!$.

Подстановка вида $\sigma=(1, 2, \dots, n)= e$ называется ***тождественной***, так как $\forall a \in M$, $e(x)=x$.

Под ***алгеброй*** понимают упорядоченную пару <A,O>, где A – непустое множество (носитель алгебры), а O – некоторое множество операций, заданных на этом множестве A.

Рассмотрим на этом множестве операцию композиции: $\sigma=\sigma_2\circ\sigma_1=\sigma_2(\sigma_1)$. Данная операция будет являться бинарной на этом множестве. Т.е. какие бы два элемента множества $S_n$ мы не взяли, их композиция окажется элементом этого множества. $S_n=<S_n, \circ>$ - алгебра подстановок.

***Натуральной степенью*** подстановки $\sigma$ называется подстановка $\sigma^n=\sigma\circ\sigma\circ\ \ldots\ \circ\sigma_1$, т.е. произведение *n* функций, каждая из которых есть $\sigma$. Очевидно, что степень подстановки не зависит от порядка множителей.

***Свойства композиции подстановок.***

1. Умножение выполняется только для подстановок одинаковой степени.
2. $\sigma_2\circ\sigma_1\neq\sigma_1\circ\sigma_2$.
3. $\sigma_1\circ(\sigma_2\circ\sigma_3)=(\sigma_1\circ\sigma_2)\circ\sigma_3$.
4. $\sigma\circ e=e\circ\sigma=\sigma$.
5. Поскольку любая подстановка $\sigma$ — биекция, для нее существует единственная обратная функция $\sigma^{-1}$, тоже являющаяся подстановкой, т.е. $\sigma\circ\sigma^{-1}=\sigma^{-1}\circ\sigma=e=\sigma^0$.
6. $e^{-1}=e;\ e^n=e,\ n\in Z$.
7. $\sigma^m\circ\sigma^n=\sigma^{m+n}$, $m,n\in Z$; $\sigma^{mn}=(\sigma^m)^n=(\sigma^n)^m$, $m,n\in Z$.

Для нахождения обратной подстановки необходимо верхнюю строку поменять с нижней и привести её к каноническому виду.

***Порядком*** подстановки назовем наименьшее натуральное число $\lambda$, такое что $\sigma^\lambda=e$.

***Инверсией*** подстановки называется перемещение (рокировка) двух соседних значений в нижнем ряду канонической записи. При этом подстановка меняется.

Пусть n - число инверсий, приводящих подстановку к единичной. Тогда функция $\varepsilon:=\sigma\to(-1)^n$ называется ***четностью (знаком)*** подстановки. Если $\varepsilon(\sigma)=1$, то подстановка называется ***четной***, если $\varepsilon(\sigma)=-1$, то подстановка называется ***нечетной***.

***Алгеброй отношений*** называется алгебра, в которой носителем является множество всех отношений, а операциями являются операции объединения, пересечения, разности и декартова произведения.

Предполагается, что отношения имеют одинаковую арность. Тогда смысл операций состоит в следующем:

$\rho_1 \vee \rho_2=\{(a_1,a_2,\ldots a_n)|\ \rho_1(a_1,a_2,\ldots a_n)$ или $\rho_2(a_1,a_2,\ldots a_n)\}$;

$\rho_1 \wedge \rho_2=\{(a_1,a_2,\ldots a_n)|\ \rho_1(a_1,a_2,\ldots a_n)$ и $\rho_2(a_1,a_2,\ldots a_n)\}$;

$\rho_1\backslash\rho_2=\{(a_1,a_2,\ldots a_n)|\ \rho_1(a_1,a_2,\ldots a_n)$ – выполняется, а $\rho_2(a_1,a_2,\ldots a_n)$ – не выполняется$\}$;

операция $\rho_1\times\rho_2$ состоит в том, что каждому набору, удовлетворяющему первому отношению, приписывается набор, удовлетворяющий второму отношению.

**Задание 2:** изучите примеры и сформируйте задание по аналогии, решите его

**Пример 1.** Пусть A множество натуральных чисел, A=N. Рассмотрим операцию "+" и "-". Являются ли они бинарными?

Решение: $(5,7)\to 12$, т. е. $5+7=12$, $12\in N$. Известно, что при сложении двух натуральных чисел получим натуральное число, следовательно операция бинарная. Операция "-" не является бинарной операцией на множестве A=N, т. к. $5-7=-2$, а $-2\notin N$.

**Пример 2.** Рассмотрим множество M={1,2,3}. Сколько на этом множестве можно задать биективных функций, отображающих M в M.

Решение: Это множество всех подстановок третьего порядка $S_3$.

$$S_3=\left\{\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}\right\}.$$

**Пример 3.** Даны две подстановки: $\sigma_1$ и $\sigma_2$. Приведите подстановки к канонической записи и найдите их композицию $\sigma_1\circ\sigma_2$ и $\sigma_2\circ\sigma_1$.

$$\sigma_1=\begin{pmatrix}1&5&4&3&2\\3&5&2&4&1\end{pmatrix},\quad \sigma_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&5&4&3&1\end{pmatrix}\ .$$

Решение: Вторая подстановка записана в каноническом виде, а первая- нет. Поэтому в верхней строке запишем числа от 1 до 5, а в нижней $\sigma_1(1)=3$, $\sigma_1(2)=1$, $\sigma_1(3)=4$, $\sigma_1(4)=2$, $\sigma_1(5)=5$. Итак, $\sigma_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&1&4&2&5\end{pmatrix}$

Найдем $\sigma_2\circ\sigma_1$. Сначала выполняется первая подстановка $\sigma_1(1)=3$, а затем вторая $\sigma_2(3)=4$ и т. д. Получим следующую матрицу: $\sigma_2\circ\sigma_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&2&3&5&1\end{pmatrix}$ .

Аналогично найдем $\sigma_1\circ\sigma_2$: $\sigma_2(1)=2$, а $\sigma_1(2)=1$, и т. д. В итоге получим

$$\sigma_1\circ\sigma_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&5&2&4&3\end{pmatrix}\neq\sigma_2\circ\sigma_1.$$

**Пример 4.** Найдите число инверсий и четность подстановки $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\6&4&3&1&2&5\end{pmatrix}$

Решение:

$$\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\6&4&3&1&2&5\end{pmatrix}\xrightarrow{1}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\6&4&1&3&2&5\end{pmatrix}\xrightarrow{2}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\6&1&4&3&2&5\end{pmatrix}\xrightarrow{3}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&6&4&3&2&5\end{pmatrix}\xrightarrow{4}$$

$$\xrightarrow{4}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&6&4&2&3&5\end{pmatrix}\xrightarrow{5}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&6&2&4&3&5\end{pmatrix}\xrightarrow{6}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&2&6&4&3&5\end{pmatrix}\xrightarrow{7}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&2&6&3&4&5\end{pmatrix}\xrightarrow{8}$$

$$\xrightarrow{8}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&2&3&6&4&5\end{pmatrix}\xrightarrow{9}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&2&3&4&6&5\end{pmatrix}\xrightarrow{10}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&2&3&4&5&6\end{pmatrix}.$$

Получили n=10, поэтому $\varepsilon(\sigma)=(-1)^{10}=1$, т.е. подстановка четная.

**Пример 5.** Данная таблица определяет отношение реляционной модели данных. Это отношение $R_5$ является подмножеством декартова произведения $D_1 \times D_2 \times D_3 \times D_4 \times D_5$, в котором сомножители $D_i$ являются соответствующими доменами.

Первый домен $D_1$ – номера групп. $D_1=\{2812, 3812, 3822\}$.

$D_2$ – названия изучаемых предметов. $D_2=\{$ВМ, ДМ, ОСиС, БД$\}$.

$D_3$ – фамилии преподавателей. $D_3=\{$Иванов, Петров, Сидоров$\}$.

$D_4$ – даты экзаменов. $D_4=\{$3 янв., 5 янв., 9 янв., 10 янв.$\}$.

$D_5$ – номера аудиторий. $D_5=\{229, 405\}$.

Тогда эти данные можно свести в таблицу, называемую базой данных.

| $R_5$ | **Группа** | **Предмет** | **Фамилия** | **Дата** | **Аудитория** |
|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 3812 | ДМ | Иванов | 3 янв. | 229 |
| **2** | 4812 | ВМ | Петров | 3 янв. | 405 |
| **3** | 4822 | ОСиС | Сидоров | 5 янв. | 229 |
| **4** | 3812 | ОСиС | Сидоров | 9 янв. | 405 |
| **5** | 4812 | ДМ | Иванов | 9 янв. | 229 |
| **6** | 4822 | ДМ | Иванов | 10 янв. | 229 |

Выполните над данным отношением следующие операции: выборки (расписание экзаменов профессора Иванова), проекции на атрибуты $D_2$, $D_3$.

Решение: Следует обратить внимание на то, что все значения каждого атрибута взяты из соответствующего домена, причем некоторые значения домена могут не присутствовать в отношении.

Результатом операции выборки являются строки, в которых домен $D_3$ представлен значением «Иванов». Получим в итоге следующее отношение:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 3812 | ДМ | Иванов | 3 янв. | 229 |
| **5** | 4812 | ДМ | Иванов | 9 янв. | 229 |
| **6** | 4822 | ДМ | Иванов | 10 янв. | 229 |

Проекция порождает множество пар, каждая из которых определяет дисциплину и экзаменатора. Проекцией исходного отношения на атрибуты $D_2$, $D_3$ является таблица вида:

| $D_2$ | $D_3$ |
|---|---|
| ДМ | Иванов |
| ВМ | Петров |
| ОСиС | Сидоров |

**Форма отчета:** отчет, защита работы.

## Практическое занятие № 11

**Тема:** Предикаты

**Цель:** отработать навыки записи логических выражений с помощью предикатов

**Оборудование:** ручка, тетрадь

**Задание 1.** Для следующих предложений выделить предикаты и для каждого из них указать область истинности, если область определения для одноместного M=R, для двухместного $M=R^2$ :

1) $x+5=1$;
2) при x=2 выполняется равенство $x^2 – 1 = 0$;
3) существует такое число x, что $x^2 – 2x + 1 =0$;
4) $x^2 – 2x + 1 =0$;
5) $x+2<3x – 4$;
6) однозначное число x кратно 3;
7) $(x+2)-(3x-4)$;
8) $x^2 + y^2>0$.

**Задание 2.** Какие из предикатов тождественно истинны?

a. $x^2 + y^2 \geq 0$;
b. $\sin^2 x + \cos^2 x =1$;
c. $x^2 + 1\geq(x+1)^2$;

d. $x^2 + y^2 > 0$;
e. $(x+1)^2>x-1$.

**Задание 3.** Найти области истинности предикатов, если $x\in R$:

1) $\sqrt{x-6}=2$;

2) $\dfrac{x^2+3x+2}{x^2+4x+3}$;

3) $\begin{cases} x^2-13x+40\geq 0; \\ 2x^2+x-30<0. \end{cases}$

**Задание 4.** Изобразить на декартовой плоскости области истинности предикатов:

1) $x+y=1$;
2) $x+3y=3$;
3) $\sin x=\sin y$;
4) $(x-2)^2+(y+3)^2=0$;
5) $(x-2)^2+(y+3)^2\leq 4$;
6) $((x>2)v(y>1))((x<-1)v(y<-2))$.

**Задание 5.** На множестве M = {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} заданы предикаты A(x): «x не делится на 5», B(x): «x – четное число», C(x): «x кратно 3». Найти множество истинности предиката: $A(x)VB(x)\rightarrow C(x)$.

**Задание6: Вопросы для самоконтроля:**

1. Определение одноместного предиката.
2. Область истинности одноместного предиката.
3. Определение тождественно истинного (тождественно ложного) предиката.
4. Определение двухместного предиката.
5. Определение n – местного предиката.
6. Какие предикаты являются равносильными? В каком случае предикат P(x) является следствием предиката Q(x)?
7. Перечислить логические операции над предикатами и показать области истинности на диаграммах Эйлера- Венна.

**Форма отчета:** отчет, защита работы.

## Практическая работа № 12

**Тема:** Предикаты

**Цель:** отработать навыки логических операций над предикатами

**Оборудование:** ручка, тетрадь

**Задание 1:** составьте по аналогии с рассмотренными заданиями выше задачи (15 шт) и решите их

**Форма отчета:** отчет, защита работы.

## Практическая работа № 13

**Тема**: Основы теории графов

**Цель:** научить представлять и строить графы.

**Оборудование:** ручка, тетрадь

**Задание 1:** рассмотрите пример

**Пример 1.** В пунктах $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ (рис. 6.37) могут быть расположены источники излучения. Если источники, помещенные в пунктах $x_i$ и $x_j$ влияют друг на друга, они соединены ребром ( $x_i$ , $x_j$ ). Какое максимальное количество источников излучения и в каких пунктах можно расположить так, чтобы они не оказывали влияния друг на друга?

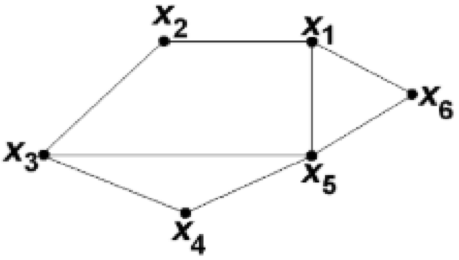



Рис. 6.37

***Решение.*** Рассмотрим последовательность внутренне устойчивых множеств графа G , изображенного на рис. 6.37:

$S_1 = \{ x_2 \}$,

$S_2 = \{ x_2, x_4 \}$,

$S_3 = \{ x_2, x_4, x_6 \}$.

Нетрудно понять, что в рассматриваемом графе четыре вершины не могут составить внутренне устойчивое множество, поэтому число внутренней устойчивости графа $\alpha(G) = 3$, т.е. лишь три источника излучения, не влияющие друг на друга, можно расположить в пунктах $x_2, x_4, x_6$.

**Пример 2.** Нарисуйте неорграф G с множеством вершин X = {a, в, c, d, e} и множеством ребер U = {(a , в) ; (a , e) ; (в , c) ; (в , d) ; (c , e) ; (d , e)}. Выпишите его матрицу смежности.

***Решение.*** Граф G показан на рис. 6.38.

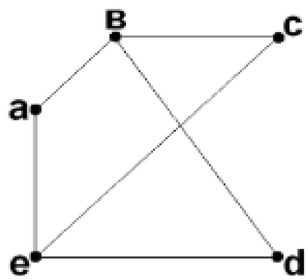



Рис. 6.38

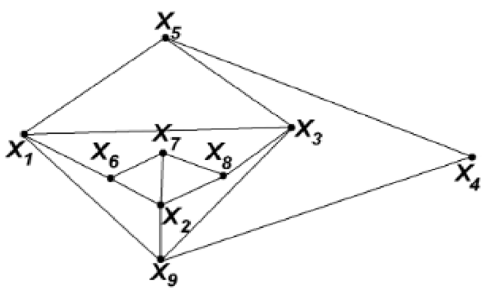
Его матрица смежности имеет вид:

$$A = \begin{array}{c} \\ a \\ в \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & в & c & d & e \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

**Пример 3.** На рис. 6.39 изображен неорграф с вершинами $x_1, x_2, x_3, \dots, x_9$, которые обозначают некоторые объекты. Ребра графа соединяют вершины – объекты, допускающие взаимное наблюдение друг за другом. Требуется оборудовать камерами видеонаблюдения минимальное количество из имеющихся объектов, чтобы это позволило вести наблюдение за всеми оставшимися объектами.

***Решение.*** Для решения задачи достаточно найти в графе внешне устойчивое множество с минимальным количеством вершин и число внешней устойчивости графа. Не трудно убедиться, что таким множеством является $\{x_2, x_5\}$, т.е. $\beta(G) = 2$.

Итак, видеокамеры, помещенные в $x_2, x_5$ смогут держать под наблюдением объекты $x_1, x_3, x_4, x_6, x_7, x_8, x_9$.




**Пример 4.** Построить матрицы смежности и инцидентности для графа G, изображенного на рис. 6.40.

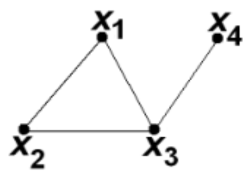
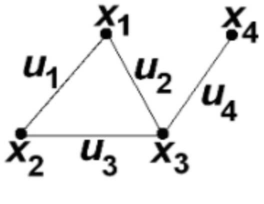



Рис. 6.40

***Решение.*** Матрица смежности имеет вид:

$$A = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Для того чтобы построить матрицу инцидентности необходимо пронумеровать ребра графа (рис. 6.41).



Матрица инцидентности имеет вид:

$$B = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

**Пример 5.** Построить матрицы смежности и инцидентности для графа G (рис. 6.42).

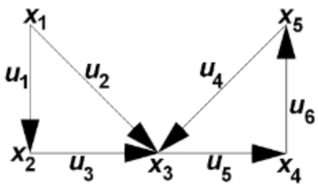



Рис. 6.42

***Решение.*** Составим матрицы смежности и инцидентности для заданного графа G.

Матрица смежности имеет вид:

$$A = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

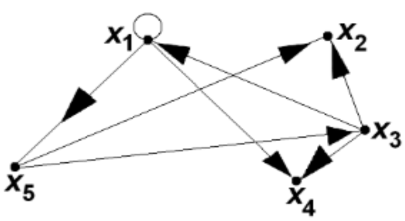
Матрица инцидентности имеет вид:

$$B = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

**Пример 6.** Изобразить орграф G, если его матрица смежности имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

***Решение.*** Орграф G с такой матрицей смежности представлен на рис. 6.43.



**Пример 7.** Изобразить орграф, для которого матрица

$$B = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

является матрицей инцидентности.

***Решение.*** Изобразим четыре вершины (по числу строк матрицы $B$) и соединим их пятью (по числу столбцов матрицы $B$) дугами: $u_1 = (x_2, x_3)$, $u_2 = (x_3, x_4)$, $u_3 = (x_4, x_1)$, $u_4 = (x_1, x_3)$, $u_5 = (x_4, x_2)$ (рис. 6.44). Построенный граф будет иметь матрицу инцидентности $B$.

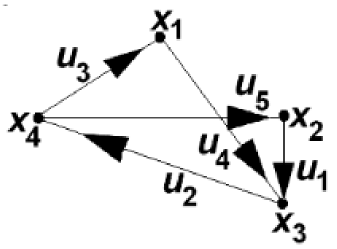



Рис. 6.44

**Пример 8.** Найти два разных остовных дерева в графе G (рис. 6.45).

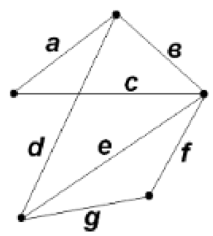



Рис. 6.45

***Решение.*** В этом графе существует несколько остовных деревьев.

Одно из них получается последовательным выбором ребер: a, *в*, *d* и f.
Другое - *в*, *c*, *e* и *g*.

Названные деревья показаны на рис. 6.46.

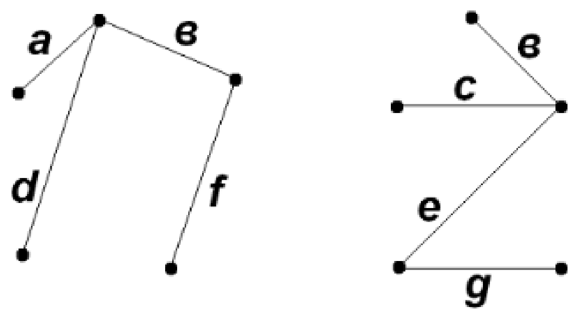



Рис. 6.46

**Задание 2:** составьте по аналогии с рассмотренными примерами и порешайте (4шт.)

**Форма отчета:** отчет, защита работы.

## Практическая работа № 14

**Тема**: Элементы теории алгоритмов
**Цель**: научить представлять и строить графы.

**Оборудование:** ручка, тетрадь
**Задание 1:** рассмотрите примеры

**Пример 9.** Построить кратчайший остов графа, представленного на рис. 6.47.

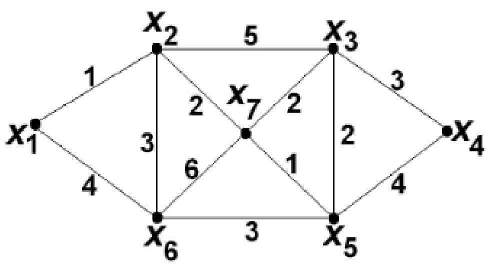



Рис. 6.47

***Решение.***

1. Изобразим отдельно все семь вершин заданного графа.
2. Перечислим все ребра графа в порядке не убывания их длин (см. табл. 6.2):

Таблица 6.2

| Длина ребра | Ребра |
|---|---|
| 1 | $(x_1,x_2)$, $(x_5,x_7)$ |
| 2 | $(x_2,x_7)$, $(x_3,x_7)$, $(x_3,x_5)$ |
| 3 | $(x_3,x_4)$, $(x_5,x_6)$, $(x_2,x_6)$ |
| 4 | $(x_1,x_6)$, $(x_4,x_5)$ |
| 5 | $(x_2,x_3)$ |
| 6 | $(x_6,x_7)$ |

Заданный граф имеет семь вершин, поэтому кратчайший его остов, согласно алгоритму Краскала, будет состоять из шести ребер, представленных на рис. 6.48.

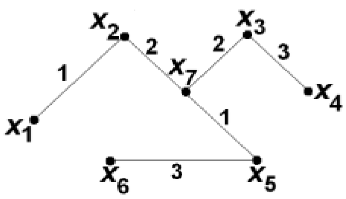



Рис. 6.48

Отметим, что сначала при построении искомого остова графа были последовательно отобраны ребра $(x_1,x_2)$, $(x_5,x_7)$, $(x_2,x_7)$, $(x_3,x_7)$. Затем ребро $(x_3,x_5)$ было пропущено, т.к. оно образовывало цикл с ранее отобранными ребрами $(x_3,x_7)$, $(x_5,x_7)$. Остальными двумя ребрами кратчайшего остова графа стали $(x_3,x_4)$, $(x_5,x_6)$.

**Пример 10.** Существует ли эйлеров цикл в графах (рис. 6.49)?

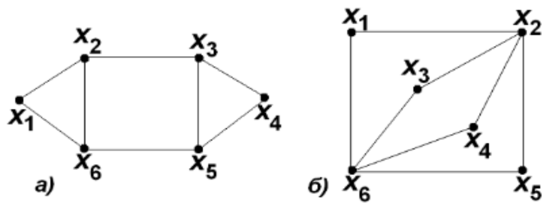



Рис. 6.49

***Решение.*** Граф является эйлеровым, если степени всех его вершин четные.

а) Так как у графа есть вершины с нечетными степенями, например, $d(x_2)=3$, то в нем нет эйлерова цикла.

б) Граф является эйлеровым, так как $d(x_1)=d(x_5)=d(x_3)=d(x_4)=2$, $d(x_2)=d(x_6)=4$.

Одним из эйлеровых циклов будет цикл (рис. 6.50):

$(x_1,x_2)$ - $(x_2,x_3)$ - $(x_3,x_6)$ - $(x_6,x_4)$ - $(x_4,x_2)$ - $(x_2,x_5)$ - $(x_5,x_6)$ - $(x_6,x_1)$.

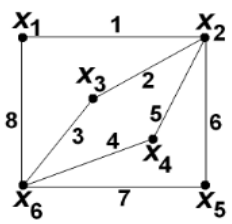



Рис. 6.50

отобранными ребрами $(x_3,x_7)$, $(x_5,x_7)$. Остальными двумя ребрами кратчайшего остова графа стали $(x_3,x_4)$, $(x_5,x_6)$.

**Пример 10.** Существует ли эйлеров цикл в графах (рис. 6.49)?

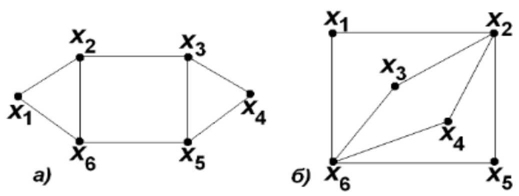


Рис. 6.49

***Решение.*** Граф является эйлеровым, если степени всех его вершин четные.

а) Так как у графа есть вершины с нечетными степенями, например, $d(x_2)=3$, то в нем нет эйлерова цикла.

б) Граф является эйлеровым, так как $d(x_1)=d(x_5)=d(x_3)=d(x_4)=2$, $d(x_2)=d(x_6)=4$.

Одним из эйлеровых циклов будет цикл (рис. 6.50):

$(x_1,x_2)$ - $(x_2,x_3)$ - $(x_3,x_6)$ - $(x_6,x_4)$ - $(x_4,x_2)$ - $(x_2,x_5)$ - $(x_5,x_6)$ - $(x_6,x_1)$.

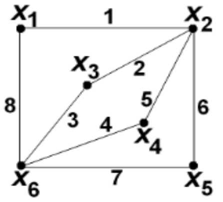


Рис. 6.50

**Задание 2:** составьте по аналогии с рассмотренными примерами и порешайте (4шт.)

**Форма отчета:** отчет, защита работы.

# 4. ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ

**4.1 Печатные издания:**
**Основные:**

О-1 Дискретная математика с элементами математической логики: учебное пособие/И.В. Сапронов, П.Н. Зюкин., С.С. Веневитина; Мин-во образования и науки РФ, ФГБОУ ВО «ВГЛТУ», Воронеж, 2017
О-2 Шевелев, Ю. П. Дискретная математика: учебное пособие / Ю. П. Шевелев. — 4-е изд., стер. — Санкт-Петербург: Лань, 2019
О-3 Туганбаев, А. А. Основы высшей математики. Часть 1: учебник для спо / А. А. Туганбаев. — Санкт-Петербург: Лань, 2021. — 312 с.

**Дополнительные:**

Д-1 Канцедал, С.А. Дискретная математика: учебное пособие /С.А. Канцедал.-М.: ИД «ФОРУМ» - ИНФРА-М, 2007.

**4.2 Электронные издания (электронные ресурсы):**

biblio-onlain.ru

# ЛИСТ ИЗМЕНЕНИЙ И ДОПОЛНЕНИЙ, ВНЕСЕННЫХ В МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

<table>
<tr><td colspan="2">№ изменения, дата внесения, № страницы с изменением</td></tr>
<tr><td>Было</td><td>Стало</td></tr>
<tr><td colspan="2">Основание:<br>Подпись лица, внесшего изменения</td></tr>
</table>