ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ИРКУТСКОЙ ОБЛАСТИ «ЧЕРЕМХОВСКИЙ ГОРНОТЕХНИЧЕСКИЙ КОЛЛЕДЖ ИМ. М.И. ЩАДОВА»

РАССМОТРЕНО	**УТВЕРЖДАЮ**
на заседании ЦК	Зам. директора по УР
«Информатики и ВТ»	О.В. Папанова
Протокол №10	«07» июнь 2023 г.
«06» июнь 2023 г.	
Председатель: Чипиштанова Д.В.	

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

для выполнения

самостоятельных работы студентов

по учебной дисциплине

ЕН. 01, Элементы высшей математики

программы подготовки специалистов среднего звена

09.02.07 Информационные системы и программирование

Разработал: Е.А. Литвинцева

2023 г.

1. ПЕРЕЧЕНЬ САМОСТОЯТЕЛЬНЫХ РАБОТ

№ п/п	**Тема самостоятельной работы**	**Количество часов**	**Оценка и контроль**
1.	Решение задач с комплексными числами	2	защита
2.	Решение задач по теории пределов	2	защита
3.	Решение задач по нахождению производной	2	защита
4.	Решение задач по вычислению определенного и неопределенного интегралов	2	защита
5.	Решение задач по дифференциальному исчислению функций нескольких действительных переменных	2	защита
6.	Решение задач по интегральному исчислению функций нескольких действительных переменных	2	защита

2. СОДЕРЖАНИЕ САМОСТОЯТЕЛЬНЫХ РАБОТ

Самостоятельная работа №1

Тема: Решение задач с комплексными числами

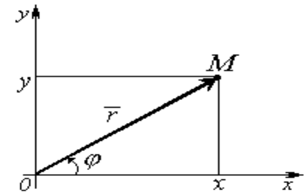
Цель: отработать умения выполнять арифметические действия над комплексными числами в тригонометрической и показательной формах; отработать умения переводить комплексные числа из одной формы в другую

Методические указания:

Теоретический материал и методические указания к выполнению заданий

Тригонометрическая форма комплексного числа

Комплексное число $z = x + iy$ можно изобразить точкой $M(x;\, y)$ плоскости xOy или ее радиус-вектором $\overline{OM}$.



Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называется *комплексной плоскостью*. Ось абсцисс называется *действиительной осью*, а ось ординат – *мнимой осью*.

Число $r = \left|\overline{OM}\right| = \sqrt{x^2 + y^2}$ называется *модулем комплексного числа* z и обозначается $|z|$, т. е. $|z| = r$. Угол φ, образованный вектором $\overline{OM}$ с положительным направлением оси Ox, называется *аргументом числа* z и обозначается $Argz$, т. е. $\varphi = Argz$.

Всякое комплексное число $z = x + iy$ может быть представлено
в ***тригонометрической форме*** $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, (1)

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, а φ – решение системы $\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{x}{r}, \\ \sin\varphi = \dfrac{y}{r}, \end{cases}$ удовлетворяющее условию $-\pi < \varphi \le \pi$ или $0 \le \varphi < 2\pi$ (называется *главным значением аргумента* и обозначается $\arg z$).

<u>**Пример 1.**</u> Комплексные числа $z_1 = 2 + 2i$, $z_2 = -i$, $z_3 = 5$ представить в тригонометрической форме.

<u>**Решение**</u>. Сначала следует найти модуль и аргумент данного комплексного числа, а после этого воспользоваться формулой (1):

$|r_1| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$, $\begin{cases} \cos\varphi_1 = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \\ \sin\varphi_1 = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}; \end{cases}$, следовательно $\varphi_1 = \dfrac{\pi}{4}$, $z_1 = 2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$;

$|r_2|=\sqrt{0^2+(-1)^2}=1$, $\begin{cases}\cos\varphi_2=\frac{0}{1}=0,\\ \sin\varphi_2=\frac{-1}{1}=-1;\end{cases}$, следовательно $\varphi_2=-\frac{\pi}{2}$,

$$z_2=\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right);$$

$|r_3|=\sqrt{5^2+0^2}=5$, $\begin{cases}\cos\varphi_3=\frac{5}{5}=1,\\ \sin\varphi_3=\frac{0}{5}=0;\end{cases}$, следовательно $\varphi_3=0$, $\quad z_3=5(\cos 0+i\sin 0)$.

Действия над комплексными числами в тригонометрической форме

Пусть даны два комплексных числа

$$z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1),\qquad z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2).$$

1) **Умножение**: $z_1z_2=r_1r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$.

2) **Деление**: $\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2))\ \ (z_2\neq 0)$.

3) **Возведение в степень**. *Формула Муавра*: $z^n=(r(\cos\varphi+i\sin\varphi))^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)$, где n – целое число.

4) **Извлечение корня *n*-й степени** $(n>1,\ n\in Z)$:

$z_k=\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)$, (1.3) где $k=0,1,2,\ldots,n-1$.

Пример 2. Вычислить z^6, если $z=1-i$.

Решение. Комплексное число $z=1-i$ представим в тригонометрической форме:

$$z=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

По формуле Муавра находим

$$z^6=(\sqrt{2})^6\left(\cos\left(-\frac{6\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{6\pi}{4}\right)\right)=8\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)\right).$$

Вычисляя косинус и синус, окончательно получим $z^6=8i$.

Показательная форма комплексного числа

$$z=re^{i\varphi}$$

Получаем:

$$e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$$

Это есть ***формула Эйлера***.

Заменяя в формуле φ на -φ и учитывая при этом что $\cos\varphi$ - чётная, $\sin\varphi$ - нечётная функции, получим:

$$e^{-i\varphi}=\cos\varphi-i\sin\varphi$$

Разрешив последние равенства относительно $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ получим ещё 2 формулы Эйлера:

$$cos\,\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \qquad\qquad sin\,\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$$

Действия над комплексными числами в показательной форме

Пусть $z_1 = r_1 \cdot e^{i\varphi_1}$ и $z_2 = r_2 \cdot e^{i\varphi_2}$,

1)**Умножение**: $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$,

2) **Деление**: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$

3) **Возведение в степень**: $z^n = r^n e^{in\varphi}$

4) **Извлечение корня**: $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} e^{(\frac{\varphi}{n}+\frac{2\pi K}{n})i}$, где к=0,1,2,3,4,5...,n-1.

<u>**Пример 3**</u>.
Написать в показательной форме комплексные числа:
а) $z_1 = 2;$ б) $z_2 = -7i$; в) $z_3 = -1 + i\sqrt{3}$; г) $z_4 = 3 - 3i;$ д) $z_5 = 5 + 2i;$

6 <u>Решение</u>

а) $z_1 = 2 = 2 + 0i;\quad r = 2;\quad tg\varphi = 0;\quad \varphi = 0;\quad 2 = 2e^{i0};$

б) $z_2 = -7i = 0 - 7i;\quad r = 7;\quad tg\varphi = \frac{-7}{0} = -\infty;\quad \varphi = -\frac{\pi}{2};\quad -7i = 7e^{-i\frac{\pi}{2}};$

в) $z_3 = -1 + i\sqrt{3};\quad r = 2;\quad tg\varphi = -\sqrt{3};\quad \varphi = \frac{2}{3}\pi;\quad -1 + i\sqrt{3}\,2e^{i\frac{2}{3}\pi};$

г) $z_4 = 3 - 3i;\quad r = 3\sqrt{2};\quad tg\varphi = -1;\quad \varphi = -\frac{\pi}{4};\quad 3 - 3i = 3\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

7 <u>**Пример:**</u> Представить в показательной форме комплексное число $z = \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{1}{8}i$.

<u>**Решение.**</u> Находим модуль числа $|z| = \sqrt{\frac{3}{64} + \frac{1}{64}} = \frac{1}{4}$ и один из его аргументов $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{\frac{1}{8}}{\frac{\sqrt{3}}{8}} = \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6}$., откуда, $z = \frac{1}{4}e^{-\frac{\pi}{6}i}$.

<u>**Пример:**</u>.Найти все значения:

а) $\sqrt[4]{-16}$; б) $\sqrt[3]{i}$; в) $\sqrt{\sqrt{3} - i}$.

<u>**Решение:**</u> а) запишем число Z=-16 в тригонометрической форме

$Z = -16 = 16(\cos\pi + i\sin\pi)$.

Согласно формуле (1) получаем

$W_k = 2 \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{4}k\right) = i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{4}k\right)\right)$, где k=0,1,2,3.

Следовательно,

$W_0 = 2 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$,

$$W_1 = 2\cdot\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} + i\sqrt{2},$$

$$W_2 = 2\cdot\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} - i\sqrt{2},$$

$$W_3 = 2\cdot\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right) = \sqrt{2} - i\sqrt{2}\cdot$$

б) Модуль числа i равен единице, а аргумент равен $\frac{\pi}{2}$, поэтому

$$W_k = \sqrt[3]{1}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}\right)\right),$$ где k=0,1,2.

Получаем

$$W_0 = 1\cdot\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2};$$

$$W_1 = 1\cdot\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2};$$

$$W_2 = 1\cdot\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = -i\cdot$$

Пример: Дано комплексное число $a = \dfrac{-4\sqrt{3}}{\sqrt{3}+3i}$. Требуется:

1) записать число a в алгебраической, тригонометрической и показательной формах, изобразить число a точкой на комплексной плоскости;

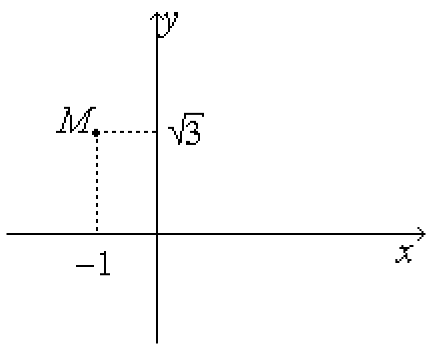
2) вычислить a^{11} и записать ответ в алгебраической, тригонометрической, показательной формах;

Решение.

1. Найдем алгебраическую форму числа a

$$a = \frac{-4\sqrt{3}}{\sqrt{3}+3i} = \frac{-4\sqrt{3}(\sqrt{3}-3i)}{(\sqrt{3}+3i)(\sqrt{3}-3i)} = \frac{-12+12\sqrt{3}i}{(\sqrt{3})^2+3^2} = \frac{-12+12\sqrt{3}i}{12} = = -1 + i\sqrt{3}.$$

Числу a соответствует точка $M(-1; \sqrt{3})$, изображенная на рис.



Найдем модуль и аргумент числа a

$r = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2$, $\varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{3}}{-1} + \pi = \pi - \operatorname{arctg}\sqrt{3} = = \pi - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{2\pi}{3}$. Тогда тригонометрическая и показательная формы числа a определяются равенствами

$$a=2(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3})=2e^{i\frac{2\pi}{3}}.$$

2. По формуле Муавра имеем.

$$(-1+i\sqrt{3})^{11}=(2\cdot e^{i\frac{2\pi}{3}})^{11}=2^{11}\cdot e^{i\frac{2\pi}{3}\cdot 11}=2^{11}\cdot e^{i\frac{22\pi}{3}}=2^{11}\cdot e^{i(8\pi-\frac{2\pi}{3})}==2^{11}\cdot e^{-i\frac{2\pi}{3}}.$$

Из полученной показательной формы числа a^{11} находим тригонометрическую и алгебраическую формы

$$a^{11}=2^{11}(\cos(-\frac{2\pi}{3})+i\sin(-\frac{2\pi}{3});$$

$$a^{11}=2^{11}\cdot(\cos(-\frac{2\pi}{3})+i2^{11}\cdot\sin(-\frac{2\pi}{3}))=2^{11}\cdot(-\frac{1}{2})+i\cdot 2^{11}\cdot(-\frac{\sqrt{3}}{2})=$$
$$=-2^{10}-i\cdot 2^{10}\sqrt{3}.$$

Варианты заданий

1. Представьте в тригонометрической и показательной формах комплексные числа:

1) $\mathrm{Z}=-\sqrt{3}+i$,

2) $\mathrm{Z}=-1$,

3) $\mathrm{Z}=-\cos\frac{\pi}{12}-i\sin\frac{\pi}{12}$,

4) $\mathrm{Z}=1+\cos\frac{10\pi}{9}+i\frac{10\pi}{9}$,

2. Записать комплексное число в алгебраической и в тригонометрической формах:

1) $\mathrm{Z}=\dfrac{i\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)}{\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}}$,

2) $\mathrm{Z}=\dfrac{1}{\cos\frac{4\pi}{3}-i\sin\frac{4\pi}{3}}$,

3) $\mathrm{Z}=\dfrac{1}{(1+i)^2}$,

4) $\mathrm{Z}=\dfrac{-\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}}{\cos\frac{13\pi}{12}-i\sin\frac{13\pi}{12}}$,

3. Представить в тригонометрической форме комплексное число Z:

1) $\mathrm{Z}=\dfrac{5(\cos 100^0+i\sin 100^0)i}{3(\cos 40^0-i\sin 40^0)}$,

2) $\mathrm{Z}=\dfrac{\sin\frac{2\pi}{5}+i\left(1-\cos\frac{2\pi}{5}\right)}{i-1}$.

4 . Записать комплексное число Z в алгебраической форме:

1) $Z=\left(\frac{i}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{12}$,

2) $Z=\left(\cos 31^0+i\sin 31^0\right)^{-10}$,

3) $Z=-\frac{(2i)^7}{\left(-\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)^6}$,

4) $Z=\frac{(1+i)^9}{(1-i)^7}$.

5. Записать комплексное число Z в тригонометрической форме:

1) $Z=\left(\sqrt{3}-i\right)^{100}$,

2) $Z=\left(\frac{\sqrt{3}i+1}{i-1}\right)^6$,

6 . Представить Z в алгебраической форме:

1) $Z=e^{2-i}$,

2) $Z=e^{-\frac{3}{2}\pi i+12\pi i}$,

3) $Z=e^{3i+7+3\pi i-\frac{\pi}{2}i}$.

7. Представить в показательной форме комплексное числа:

1) $Z=-\sqrt{12}-2i$,

2) $Z=-\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7}$.

8. Записать в показательной и алгебраической формах комплексное число:

1) $Z=5e^{\frac{\pi i}{4}}\cdot 0.2e^{\frac{\pi i}{6}}\left(\cos\frac{5\pi}{12}-i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$,

2) $Z=\left(\frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{12}i}\right)^{-3}$,

3) $Z=\left(\sqrt{3}-i\right)^6$,

9. Записать в показательной форме все значения $\sqrt[n]{Z}$:

1) $Z=1, n=3$,

2) $Z=-1, n=5$,

3) $Z=-4+\sqrt{48}i, n=3$,

4) $Z=-1-\sqrt{3}i, n=4$.

Форма отчета: защита

Самостоятельная работа №2

Тема: Решение задач по теории пределов

Цель: отработать навыки вычисления предела

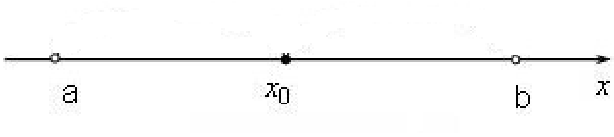
Методические указания:

Теоретический материал и методические указания к выполнению заданий

Раскрытие неопределенностей, правило Лопиталя

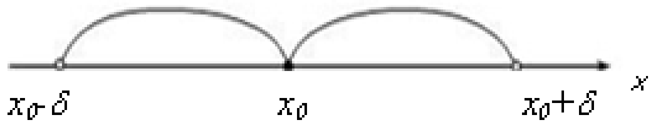
1. Предел функции в конечной точке x_0

Определение. Окрестностью точки x_0 называется любой интервал, содержащий точку x_0:



$$x \in (a;b).$$

Определение. δ - окрестностью точки x_0 называется интервал ($x_0 - \delta$; $x_0 + \delta$), длина которого 2δ, симметричный относительно x_0:



$$x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta) \Rightarrow |x - x_0| < \delta.$$

Определение. Число А называется *пределом функции* $f(x)$ *при* $x \to x_0$, если для любого наперед заданного малого числа $\varepsilon > 0$ существует такое малое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для любого *x,* принадлежащего D(f) и проколотой δ-окрестности точки x_0, то есть $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство: $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Итак: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in D(f) \ : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$.

Пример $\lim\limits_{x \to 1}(3x - 8) = -5$;

Пример Найти пределы функций:

а) $\lim\limits_{x \to 2}(4x^4 + 3x^3 - 8x - 2)$; б) $\lim\limits_{x \to 5}(2x^2 + 8x + 35)$;

в) $\lim\limits_{x \to 2}\dfrac{x^2 + 3x + 4}{x + 2}$; г) $\lim\limits_{x \to 1}(2 + x)^5$.

2. Предел функции на бесконечности

Определение. *Окрестностью бесконечно удаленной точки* называют множество значений *x*, удовлетворяющих неравенству: $|x| > N$, где N достаточно большое положительное число.

Определение. *Число А называется пределом функции f(x) при* $x \to \infty$, если для любого малого числа $\varepsilon > 0$ существует другое большое число $N = N(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого $x \in D(f)$, удовлетворяющего неравенству $|x| > N$, выполняется неравенство: $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Этот факт записывают: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$.

Пример $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{4x^3+1}{x^3-1} = 4.$

Пример. Найти пределы функций.

а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^2-3}$; б) $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x}{x+1}$.

3. Теоремы о пределах:

Теорема Если $f(x)=c$, где c – константа, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=c.$

Теорема Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B,$ тогда

а) $\lim\limits_{x\to x_0} \left(f(x)\pm g(x)\right) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A \pm B;$

б) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\times g(x) = \lim\limits_{x\to x} f(x)\times \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A\times B;$

в) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} = \dfrac{A}{B}$, если ;

г) $\lim\limits_{x\to x_0} c\times f(x) = c\times \lim\limits_{x\to x_0} f(x).$

4. Математические неопределенности

Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0,$ а так же, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$, то вычисление предела $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ приводит к отношениям вида $\dfrac{0}{0}$ и $\dfrac{\infty}{\infty}$. Если при помощи различных преобразований удается вычислить пределы указанного вида или доказать, что они существуют, то говорят, что неопределенность раскрыта.

Пример Найти предел функций: $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^3-27}{x^2-5x+6}$;

Решение: Так как $\lim\limits_{x\to 3}\left(x^3-27\right)=0$ и $\lim\limits_{x\to 3}\left(x^2-5x+6\right)=0,$ то имеет место неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$.

Для ее раскрытия разложим числитель и знаменатель дроби на множители, затем сократим дробь на множитель, стремящийся к нулю.

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^3-27}{x^2-5x+6} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)\left(x^2+3x+9\right)}{(x-3)(x-2)} = \lim_{x\to 3} \frac{x^2+3x+9}{x-2} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to 3}\left(x^2+3x+9\right)}{\lim\limits_{x\to 3}(x-2)} = \frac{3^2+3\times 3+9}{3-2} = 27.$$

Пример Найти предел функций: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+4x+7}{3-2x-3x^2}$;

Решение: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+4x+7}{3-2x-3x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\left(1+\dfrac{4}{x}+\dfrac{7}{x^2}\right)}{x^2\left(\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{2}{x}-3\right)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{4}{x}+\dfrac{7}{x^2}}{\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{2}{x}-3}=-\dfrac{1}{3}.$

Составить и порешать не менее 10 пределов по аналогии

Форма отчета: защита

Самостоятельная работа №3

Тема: Решение задач по нахождению производной

Цель: отработать умения вычислять производные функций

Методические указания:

Теоретический материал и методические указания к выполнению заданий

1. Производная функции

Количественное описание сложных изменяющихся процессов жизнедеятельности с помощью элементарной математики невозможно, поскольку соответствующие математические величины, используемые для этой цели, должны сами обладать способностью к “движению” . Высшая математика, в отличие от элементарной, оперирует зависимостями и величинами, подверженными изменениям, происходящим по определенным законам. Величиной, определяющей темп изменения функциональных зависимостей в высшей математике, является **производная функции**.

Для пояснения этого понятия рассмотрим рис.1, где графически представлена некоторая произвольная функциональная зависимость $y = f(x)$. Приращением функции $y = f(x)$ называется разность

$$\Delta y = f(x+\Delta x)-f(x),$$

где Δx - приращение аргумента x. Из рис. 1 видно, что

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=tg\beta. \qquad (1)$$

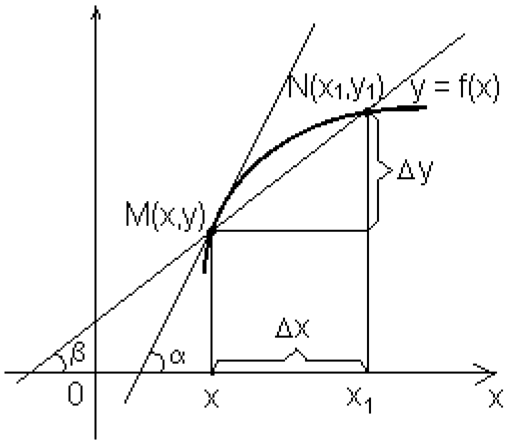


Рис. 1

2. Определение производной

Пусть на множестве X задана функция $y = f(x)$. Фиксируем точку $x \in X$ и задаем приращение аргумента Δx. Тогда точка $x + \Delta x$ соответствует $f(x + \Delta x)$ и $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ называется приращением функции.

Если существует предел

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

то он называется производной функции $f(x)$ в точке x.

Существуют и другие обозначения производной: $\dot{x}$, $\frac{dy}{dx}$.

Операция вычисления производной функции называется операцией дифференцирования, а если $f'(x)$ конечна, то функция $f(x)$ называется дифференцируемой.

<u>Геометрический смысл производной:</u> тангенс угла между касательной, проведенной к графику функции в данной точке, и осью абсцисс, числено равен значению производной функции в данной точке.

<u>Физический смысл производной:</u> мгновенная скорость движения в данной точке представляет собой значение в данный момент времени производной от пути по времени.

Если за время Δt тело проходит путь ΔS, то средняя за это время скорость движения: $v_{\text{ср.}} = \frac{\Delta S}{\Delta t}$. Но на пути ΔS скорость может иметь различные мгновенные значения ($v_{\text{мгн}}$), которые определяются как предел отношения ΔS к Δt при $\Delta t \to 0$:

$$v_{\text{мгн.}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt}.$$

Если рассматривается ускорение (a) механического движения, то мгновенное ускорение представляет собой первую производную от скорости или вторую производную от пути:

$$a_{\text{мгн.}} = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dS}{dt}\right) = \frac{d^2S}{dt^2}.$$

Таким образом, **вторая производная имеет физический смысл ускорения.**

3. Дифференциал функции.

Дифференциал функции (dy) - это произведение производной функции на приращение (или дифференциал) аргумента:

$$dy = y' \Delta x = y\, dx. \tag{5}$$

Аналитический смысл дифференциала заключается в том, что дифференциал dy представляет собой главную часть приращения функции. При малых приращениях можно считать $dy \approx \Delta y$.

Из смысла дифференциала следует его важное практическое значение: нахождение дифференциала функции позволяет определить, насколько изменилась функция, если произошли небольшие изменения переменной, от которой она зависит.

Пример. Имеется куб с длиной ребра l=*1м*. На какую величину ΔV изменится объем куба, если длина ребра увеличилась на Δl=*1см*?

Эту задачу можно, конечно, решить и методами элементарной математики:

$$\Delta V = (l+\Delta l)^3 - l^3.$$

Однако, даже в этом элементарном примере необходимо выполнять довольно значительные вычисления.

Учитывая, что приращение объема куба (функции) при малых изменениях длины его ребра (аргумента) примерно равно дифференциалу объема, получим:

$$\Delta V \approx dV = (l^3)' \cdot \Delta l = 3l^2 \Delta l = 3 \cdot 1 \cdot 0{,}01 = 0{,}03\text{м}^3.$$

4. ПРАВИЛА И ФОРМУЛЫ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Если C - постоянная, $u = u(x)$, $v(x)$ - некоторые дифференцируемые функции, то справедливы следующие правила дифференцирования:

1) $(c)' = 0$
2) $(x)' = 1;$
3) $(u \pm v)' = u' \pm v';$
4) $(cu)' = cu';$
5) $(uv)' = u' \cdot v + u \cdot v';$
6) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2} \qquad (v \neq 0);$

Все эти правила применяются к таблице производных

<u>ТАБЛИЦА ПРОИЗВОДНЫХ</u>

1. $(c)' = 0,$
2. $(x)' = 1,$

3. $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$,

4. $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}\cdot x'$,

5. $\left(x^n\right)' = n\cdot x^{n-1}$,

6. $\left(e^x\right)' = e^x$,

7. $\left(a^x\right)' = a^x \ln a$,

8. $\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}$,

9. $\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x\ln a}$,

10. $\left(\sin x\right)' = \cos x$,

11. $\left(\cos x\right)' = -\sin x$,

12. $\left(tg\, x\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$,

13. $\left(ctg\, x\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$,

14. $\left(\arcsin x\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,

15. $\left(\arccos x\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,

16. $\left(arctg\, x\right)' = \dfrac{1}{1+x^2}$,

17. $\left(arcctg\, x\right)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

Пример 1. $y = 4x^3 - 2\sqrt[8]{x^5} + \dfrac{7}{x^4} + 1.$

Решение.

$$y' = \left(4x^3\right)' - \left(2x^{5/8}\right)' + \left(7x^{-4}\right)' + (1)' = 4\left(x^3\right)' - 2\left(x^{5/8}\right)' +$$

$$+7\left(x^{-4}\right)' + (1)' = 4\cdot 3x^2 - 2\frac{5}{8}x^{-3/8} + 7(-4)x^{-5} + 0 =$$

$$= 12x^2 - \frac{5}{4}x^{-3/8} - 28x^{-5} = 12x^2 - \frac{5}{4\sqrt[8]{x^3}} - \frac{28}{x^5}.$$

Пример 2. $y = x^3 \cos x.$

Решение.

$$y' = \left(x^3\cos x\right)' = \left(x^3\right)'\cos x + x^3\left(\cos x\right)' = 3x^2\cos x - x^3\sin x = x^2\left(3\cos x - x\sin x\right).$$

Пример 3. $y = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}.$

Решение.

$$y' = \frac{\left(x^2+1\right)'\left(x^2-1\right)-\left(x^2+1\right)\left(x^2-1\right)'}{\left(x^2-1\right)^2} = \frac{2x\left(x^2-1\right)-\left(x^2+1\right)2x}{\left(x^2-1\right)^2} =$$

$$= \frac{2x^3-2x-2x^3-2x}{\left(x^2-1\right)^2} = \frac{-4x}{\left(x^2-1\right)^2}.$$

Варианты задания:

Вариант 1

1. Найти производные

а) $y = 3x^2 + \sqrt[3]{x} - \frac{1}{x^2} + 3$,

б) $y = \sin x \cdot arctg\ x$,

в) $y = \frac{\cos x}{x - \sqrt[3]{x}}$,

Вариант 2

1. Найти производные

а) $y = 4x^5 - \sqrt[4]{x^3} + \frac{1}{x^3} - \sqrt[3]{3}$,

б) $y = \sqrt{x}\sin x$,

в) $y = \frac{tgx}{\sin x - \cos x}$,

г) $y = ctg(2x \sin\frac{1}{2})$,

Вариант 3

1. Найти производные

а) $y = x^{10} - 2\sqrt{x} - \frac{1}{x} + \sqrt[4]{2}$,

б) $y = e^x tgx$,

в) $y = \frac{x^2 + x}{\sqrt{x} - 1}$,

г) $y = tg\frac{x+1}{2}$,

Вариант 4

1. Найти производные

а) $y = 7x^4 - \sqrt[7]{x^2} - \frac{1}{x^4} + \sqrt{7}$,

б) $y = e^x ctgx$,

в) $y = \frac{\sqrt[3]{x} + 7}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}$, г) $y = \cos x - \frac{1}{3}\sin 2x$,

Форма отчета: задачи

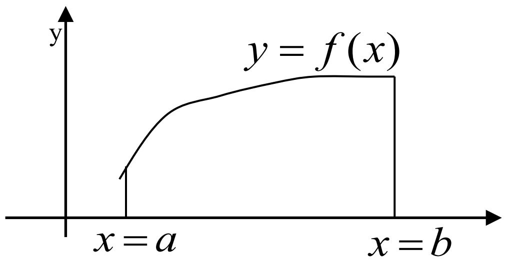
Самостоятельная работа №4

Тема: Решение задач по вычислению определенного и неопределенного интегралов

Цель: отработать навыки на вычисление определенного и неопределенного интеграла

Методические указания:

Пусть дана функция f(x) на отрезке [a;b]. Площадь плоской фигуры, расположенной ниже графика функции f(x) и ограниченного прямыми x=a, x=b и осью абсцисс, называется определенным интегралом функции f(x) по отрезку [a;b]:



$$\int_a^b f(x)dx$$

[a;b] – отрезок интегрирования;
a – нижний предел интегрирования, b – верхний предел интегрирования.

Что прибавилось по сравнению с неопределенным интегралом? *Прибавились пределы интегрирования.*
Геометрический смысл *– вычисление площади с помощью определенного интеграла.*
Что значит решить определенный интеграл? *Это значит, найти число.*
Как решить определенный интеграл? *С помощью формулы Ньютона-Лейбница:*

$$\int_a^b f(x)dx = F(X)\Big|_a^b = F(b) - F(a) \qquad (1)$$

Всегда ли существует определенный интеграл? Нет, не всегда.

<u>*Пример 1:*</u>

$\int_{-5}^{-2} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ не существует, поскольку отрезок интегрирования [-5;-2] не входит в область определения подынтегральной функции (значения под квадратным корнем не могут быть отрицательными).

<u>*Пример 2:*</u>

$\int_{-2}^{3} tgx dx$ - такого интеграла тоже не существует, так как в точках $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{2}$ отрезка [2;3] не существует тангенса.

<u>Теорема:</u>

Для того чтобы определенный интеграл вообще существовал, необходимо чтобы подынтегральная ***функция была непрерывной на отрезке интегрирования.***

<u>*Пример 3:*</u>

$$\int_{-5}^{-2} \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2(\sqrt{x})\Big|_{-5}^{-2}$$ - интеграла не существует - нельзя подставлять отрицательные числа под корень!

Теорема:

Если функция непрерывна на отрезке [a;b], то она интегрируема на этом отрезке. Для всякой функции f(x), непрерывной на отрезке [a;b], существует на этом отрезке неопределенный интеграл ∫f(x)d(x)=F(x)+C и имеет место ***формула Ньютона-Лейбница.***

Этапы решения определенного интеграла следующие:

1) Сначала находим первообразную функцию F(x) (неопределенный интеграл).

Обратите внимание, что константа С в определенном интеграле никогда не добавляется*.*

Обозначение $\Big|_a^b$ является чисто техническим, и вертикальная палочка не несет никакого математического смысла, по сути – это просто отчёркивание. Сама запись $F(X)\Big|_a^b$ нужна, как подготовка для применения формулы Ньютона-Лейбница.

2) Подставляем значение верхнего предела в первообразную функцию F(b).

3) Подставляем значение нижнего предела в первообразную функцию F(a).

4) Рассчитываем (без ошибок!) разность F(b)-F(a), то есть, находим число.

Может ли определенный интеграл быть равен отрицательному числу? Может. И отрицательному числу. И нулю. Может даже получиться бесконечность.

Может ли нижний предел интегрирования быть больше верхнего предела интегрирования? Может, и такая ситуация реально встречается на практике.

Рассмотрим некоторые свойства определенного интеграла:

7.1 1. Замена переменной в определенном интеграле

Для определенного интеграла справедливы все типы замен, что и для неопределенного интеграла. Единственная новизна состоит в вопросе, как поменять пределы интегрирования при замене.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(z)dz;$$

7.2 2. Интеграл по нулевому промежутку равен нулю:

$$\int_a^a f(x)dx = 0;$$

3. В определенном интеграле можно переставить верхний и нижний предел, сменив при этом знак:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

<u>*Пример 4:*</u>

$$\int_6^0 (1-x)dx = -\int_0^6 (1-x)dx = \int_0^6 (x-1)dx$$ – в таком виде интегрировать значительно удобнее.

4. Если функция f(x) непрерывна на [a;b] и c∈[a;b], то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx;$$

5. Интеграл от суммы (или разности) равен сумме (или разности) интегралов:
$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$ – это справедливо не только для двух, но и для любого количества функций.

6. Для определенного интеграла справедливы свойства линейности:
$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$, где c – постоянная;

7. Если f(x) – нечетная функция, то есть f(-x)=f(x), то

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0;$$

Если f(x) – четная функция, то есть f(-x)=-f(x), то

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx.$$

8. Для определенного интеграла справедлива *формула интегрирования по частям*:

$$\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du$$

Пример 1. Применяя формулу Ньютона-Лейбница, вычислить интеграл

$$\int_{-1}^{2} x^3 dx.$$

Решение.

$$\int_{-1}^{2} x^3 dx = \frac{x^4}{4}\Bigg|_{-1}^{2} = \frac{2^4}{4} - \frac{(-1)^4}{4} = \frac{16}{4} - \frac{1}{4} = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}.$$

Пример 2. Вычислить определенный интеграл

$$\int_1^2 2x^2 dx$$

Решение:

$$\int_1^2 2x^2 dx \overset{(1)}{=} 2\int_1^2 x^2 dx \overset{(2)}{=} \frac{2}{3}(x^3)\Big|_1^2 \overset{(3)}{=} \frac{2}{3}(2^3 - 1^3) = \frac{2}{3}(8-1) = \frac{2}{3}\cdot 7 = \frac{14}{3} = 4\frac{2}{3}$$

(1) Выносим константу за знак интеграла.

(2) Интегрируем по таблице с помощью самой популярной формулы $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$.

Появившуюся константу $\frac{1}{3}$ целесообразно отделить от x^3 и вынести за скобку. Делать это не обязательно, но желательно – зачем лишние вычисления?

(3) Используем формулу Ньютона-Лейбница $\int_a^b f(x)dx = F(X)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$. Сначала подставляем в x^3 верхний предел, затем – нижний предел. Проводим дальнейшие вычисления и получаем окончательный ответ.

Пример 3. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{\pi/2} \cos^2 \varphi \, d\varphi$.

Решение. Преобразуем подынтегральную функцию по формуле: $\cos^2 \varphi = \dfrac{1+\cos 2\varphi}{2}$.

$$\int\limits_0^{\pi/2} \cos^2 \varphi \, d\varphi = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 2\varphi}{2} \, d\varphi = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2} (1+\cos 2\varphi) \, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi + \frac{1}{4}\int\limits_0^{\pi/2} \cos 2\varphi \, d2\varphi = \frac{1}{2}\varphi \Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{4}\sin 2\varphi \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}.$$

Задача 1: Вычислить определенный интеграл $\int\limits_1^2 2x^2 dx$

Задача 2: Вычислить определенный интеграл $\int\limits_1^5 \frac{7dx}{x}$

Задача 3: Вычислить определенный интеграл $\int\limits_{-2}^4 (8+2x-x^2)dx$

Задача 4: Вычислить определенный интеграл, методом замены переменной $\int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{xdx}{\sqrt{x^4+16}}$

Форма отчета: задачи

Самостоятельная работа №5

Тема: Решение задач по дифференциальному исчислению функций нескольких действительных переменных

Цель: отработать умения вычислять производные сложных функций

Методические указания:

Теоретический материал и методические указания к выполнению заданий

Производная сложной функции»

Прежде чем воспользоваться таблицами производных, надо установить, является функция простой или сложной.

Функция $y = f(u)$ называется сложной, если u есть функция от x: $u = u(x)$, т. е. $y = f(u(x))$.

Производная сложной функции вычисляется по формуле

$$y' = [f(u(x))]' = f'_u \cdot u'_x,$$

т. е. сначала вычисляется производная функции $f(u)$ по переменной u, и затем она умножается на производную функции $u(x)$ по переменной x.

7.2.1.1

7.2.1.2 Таблица производных

1. $\left(u^n\right)' = nu^{n-1} \cdot u' \;(n \in R)$

2. $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{1}{u^2} \cdot u'$

3. $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$

4. $\left(\sin u\right)' = \cos u \cdot u'$

5. $\left(\cos u\right)' = -\sin u \cdot u'$

6. $\left(\mathrm{tg} u\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$

7. $\left(\mathrm{ctg} u\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$

8. $\left(\arcsin u\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u' \qquad (|u| < 1)$

9. $\left(\arccos u\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1+u^2}} \cdot u' \qquad (|u| < 1)$

10. $\left(\mathrm{arctg} u\right)' = \dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$

11. $\left(\mathrm{arcctg} u\right)' = -\dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$

12. $\left(a^u\right)' = a^u \ln a \cdot u' \,(a > 0,\; a \in R)$

13. $e^u = e^u \cdot u'$

14. $\left(\log_a u\right)' = \dfrac{1}{u \ln a} \cdot u'$

15. $\left(\ln u\right)' = \dfrac{1}{u} \cdot u'$

Пример . Найти производные функций:

а) $y = \mathrm{ctg}^2 x$; б) $y = 3\sin^5 x$; в) $y = \sqrt[3]{\dfrac{e^x+1}{e^x-1}}$.

Решение. а) Функция y – это сложная функция $u = \mathrm{ctg} x$, $y = u^2$. Тогда по формуле 1 таблицы производных $y'_x = 2u \cdot u' = 2\mathrm{ctg} x\left(\mathrm{ctg} x\right)'$, а по формуле 5 $\left(\mathrm{ctg} x\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x} \cdot x' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.Таким образом, $y' = 2\mathrm{ctg} x \cdot \left(-\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)$.

б) Используем правило дифференцирования 3а: $y' = \left(3\sin^5 x\right)' = 3\left(\sin^5 x\right)'$. Функция $\sin^5 x$ – сложная $u = \sin x$, $\sin^5 x = u^5$. Поэтому
$y' = 3 \cdot 5u^4 = 15\sin^4 x\left(\sin x\right)' = 15\sin^4 x \cdot \cos x$.

в) $$y' = \left(\sqrt[3]{\frac{e^x+1}{e^x-1}}\right)' = \left(\left(\frac{e^x+1}{e^x-1}\right)^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}\left(\frac{e^x+1}{e^x-1}\right)^{\frac{1}{3}-1} \cdot \left(\frac{e^x+1}{e^x-1}\right)' =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{e^x+1}{e^x-1}\right)^{-\frac{2}{3}} \frac{\left(e^x+1\right)'\left(e^x-1\right) - \left(e^x+1\right)\left(e^x-1\right)'}{\left(e^x-1\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{e^x\left(e^x-1\right) - \left(e^x+1\right)e^x}{\left(e^x-1\right)^2} = \frac{1}{3}\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{e^x\left(e^x-1-e^x-1\right)}{\left(e^x-1\right)^2} == -\frac{2}{3} \frac{e^x}{\left(e^x+1\right)^{\frac{2}{3}} \cdot \left(e^x-1\right)^{\frac{4}{8}}}.$$

Варианты заданий

Домашняя контрольная работа

З а д а н и е . Найти первые производные функций.

1. *а)* $y = 3x^5 - \dfrac{1}{x} + \sqrt[4]{x}$;
   б) $y = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$;
   в) $y = (x+1)^2 \cdot \cos 5x$;
   г) $y = \operatorname{arctg}(e^{2x} + 3)$;
   д) $y = \sqrt{x + \sqrt[3]{x}}$;
   е) $y = \ln \operatorname{tg}(2x+1)$;
   ж) $y = \dfrac{x^3}{(x-2)^2}$;
   з) $y = 2^{3x} + 7x^7 + e^{-x^2}$;
   и) $y = 0{,}7^{\operatorname{ctg}^2 x}$;
   к) $y = x^{\arcsin x}$.

З а д а н и е . Найти первые производные функций.

2. *а)* $y = 4x^7 + \dfrac{1}{x^2} - \sqrt{2x}$;
   б) $y = \dfrac{x + e^{3x+2}}{1 + \cos 3x}$;
   в) $y = (x+2) \cdot e^{-x^2}$;
   г) $y = \sin(3x^7 + 1) + 8x$;
   д) $y = 2^{\operatorname{tg} x} + 3^{\cos 4x}$;
   е) $y = x^2 \cdot \cos 7x$;
   ж) $y = \dfrac{x^2}{(x+1)^2}$;
   з) $y = \ln^5 \sin x$;
   и) $y = \arcsin e^{4x}$;
   к) $y = (\sin 2x)^{\frac{1}{x}}$.

З а д а н и е . Найти первые производные функций.

3. *а)* $y = 7x - \sqrt[3]{x} + \dfrac{1}{x^3}$;
   б) $y = \sqrt[3]{\dfrac{1+x^2}{1-x^2}}$;
   в) $y = 3x \cdot \arcsin 2x$;
   г) $y = \sqrt{x^2+1} + \sqrt[3]{x^3+1}$;
   д) $y = 3^{\operatorname{ctg} x} + 8^{\cos 4x}$;
   е) $y = \sin^4 x + \cos^4 x$;
   ж) $y = \ln \dfrac{x^2}{1-x^2}$;
   з) $y = (x^2 + 2x + 2) \cdot e^{-x}$;
   и) $y = \sin(x+6) - x \cdot \cos 4x$;
   к) $y = (x^2)^{\frac{1}{x}}$.

З а д а н и е . Найти первые производные функций.

4. *а)* $y = 9x^2 + \dfrac{1}{2x^2} - \sqrt[3]{x}$;
   е) $y = x \cdot \operatorname{arctg} 3x$;

б) $y = \sqrt[3]{1 + x^3}$;

в) $y = e^{\sin 5x} \cdot \ln x$;

г) $y = \ln \sin (2x + 5)$;

д) $y = 0{,}9^{\cos^2 x}$;

ж) $y = \dfrac{9 - x^2}{9 + x^2}$;

з) $y = 3 \sin^2 x \cdot \cos 2x$;

и) $y = e^{-x^2} + x^2 + \dfrac{3}{x}$;

к) $y = x^{\arccos x}$.

З а д а н и е . Найти первые производные функций.

5. *а)* $y = 3x^5 - \dfrac{1}{x^5} - \sqrt[5]{x}$;

б) $y = 2\sqrt{4x + 3} - \dfrac{3}{\sqrt{x^3 + x + 1}}$;

в) $y = (\ln x + 1)^2 \cdot \cos 2x$;

г) $y = \arcsin \sqrt{1 - 4x}$;

д) $y = 5^{\operatorname{tg} x} + 3^{\sin x}$;

е) $y = x\sqrt{1 + x^2}$;

ж) $y = \dfrac{1 + e^x}{1 - e^x}$;

з) $y = \sin^2 2x + \cos x$;

и) $y = \ln \operatorname{tg} 5x$;

к) $y = (x + 1)^{2x}$.

З а д а н и е . Найти первые производные функций.

6. *а)* $y = 2x^7 - \dfrac{1}{7x^7} - \sqrt[7]{2x}$;

б) $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$;

в) $y = (3 - \sin^2 x)^3$;

г) $y = \dfrac{1 + \cos 2x}{x^3} + \sin (3x + 9)$;

д) $y = e^{\sqrt{2x}} + 3$;

е) $y = \operatorname{arctg} x^2 + 7x^6 + 2$;

ж) $y = \dfrac{x^2}{x^3 - 1}$;

з) $y = x^2 \cdot \ln(x^2 + 1)$;

и) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} + 5\sqrt[5]{x^3 + 1}$;

к) $y = (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$.

З а д а н и е . Найти первые производные функций.

7. *а)* $y = 3x^7 - \dfrac{1}{x^7} - \sqrt[7]{3x}$;

б) $y = \sqrt{3 - 4x + 5x^2} + 4x \cdot \ln x$;

в) $y = \arcsin(3x^2 + 2)$;

г) $y = \dfrac{\sin^2 x}{2 + \cos^2 x}$;

д) $y = 3^{\sin^2 x}$;

е) $y = \dfrac{5 + \sin 5x}{4 - \cos 2x}$;

ж) $y = (x^2 + 1) \cdot \operatorname{arctg} 4x$;

з) $y = (2x + 5) \cdot e^{-x^5}$;

и) $y = \ln \sqrt{x + 1}$;

к) $y = (\cos x)^{\sqrt{x}}$.

З а д а н и е . Найти первые производные функций.

8. *а)* $y = 4x^9 - \dfrac{4}{x^9} - \sqrt[9]{4x}$;

б) $y = \sqrt[3]{1 + \sqrt{x + 3}}$;

е) $y = e^x \cdot \cos x$;

ж) $y = 3x^2 \cdot \ln x^3$;

в) $y = \operatorname{arctg}\dfrac{2x}{1-x^2}$;

г) $y = x \cdot \arccos\sqrt{4-x^2}$;

д) $y = 0{,}2^{\operatorname{ctg}^2 x}$;

з) $y = \dfrac{3+\sin 2x}{9-e^{2x}}$;

и) $y = (2x + 2\cos x) \cdot e^{-x}$;

к) $y = (\sin 2x)^{\cos x}$.

З а д а н и е . Найти первые производные функций.

9. *а*) $y = 15x^3 - \dfrac{15}{x^3} + \sqrt[3]{x^2}$;

б) $y = \sqrt{1+\ln^2 x}$;

в) $y = \dfrac{\cos 3x + 4}{\sin 3x - 4}$;

г) $y = \operatorname{tg}^2\sqrt{x+5} + 8x + 7$;

д) $y = (x + x^2)^x$;

е) $y = e^{\sin 4x + 8}$;

ж) $y = \dfrac{x}{x-1} - \ln 4x$;

з) $y = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$;

и) $y = \cos^{100} x + \sin 100x$;

к) $y = 3^{\arccos 3x}$.

З а д а н и е . Найти первые производные функций.

10. *а*) $y = 5x^{10} + \dfrac{5}{x^{10}} + \sqrt[10]{5x}$;

б) $y = \sqrt{1+\cos^2 x^2}$;

в) $y = x^2 \cdot \sqrt{1-x^2}$;

г) $y = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$;

д) $y = 5^{\sin x^3}$;

е) $y = \sin x \cdot \cos(7x + 5)$;

ж) $y = (e^{\cos x} + 3)^2$;

з) $y = \ln\sin(3x + 5)$;

и) $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$;

к) $y = (x^3)^{\ln x}$.

З а д а н и е . Найти первые производные функций.

11. *а*) $y = 3x^{11} + \dfrac{5}{x^{11}} + \sqrt[11]{x^3}$;

б) $y = \left(\sin\dfrac{x}{2} - \cos\dfrac{x}{2}\right)^2$;

в) $y = \dfrac{x}{\sqrt{25-x^2}}$;

г) $y = \operatorname{arctg}(\ln x) + \ln(\sin x)$;

д) $y = 2 \cdot \cos(4x + x^2)$;

е) $y = (1 - x^2) \cdot \cos 2x$;

ж) $y = \sqrt[3]{x + x\sqrt{x}}$;

з) $y = e^{-x} \cdot \sin 2x$;

и) $y = \ln^5(x^2 - 1)$;

к) $y = (\sqrt{x})^{\frac{1}{x}}$.

З а д а н и е . Найти первые производные функций.

12. *а*) $y = 12x^7 - \dfrac{12}{x^7} + \sqrt[7]{x^2}$;

е) $y = e^{\operatorname{ctg} 3x}$;

б) $y = x^2 \cdot \arccos\dfrac{x}{2} - 4x$;

в) $y = \dfrac{x^5}{x^4+2}$;

г) $y = \mathrm{arctg}^2 x + 6x^2$;

д) $y = 5^{\frac{1-x^2}{1+x^2}} + 7^{\cos 4x}$;

ж) $y = \sqrt[4]{1+\cos x^4}$;

з) $y = \dfrac{4+\cos 3x}{\sin(5x+3)}$;

и) $y = (x^3 + x^2) \cdot e^{-x}$;

к) $y = x^{\arcsin^2 x}$.

З а д а н и е . Найти первые производные функций.

13. *а)* $y = 6x^7 + \dfrac{7}{x^6} + \sqrt[6]{x^5}$;

б) $y = \sqrt[3]{2 - x^2 \cdot \sqrt{x}}$;

в) $y = \dfrac{x^6}{6x^5 - 1}$;

г) $y = \ln^3 \sin(3x+3)$;

д) $y = 2^{\mathrm{tg} 3x}$;

е) $y = \ln(x^2 + 5)$;

ж) $y = x^5 \cdot e^{-x}$;

з) $y = \mathrm{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$;

и) $y = \dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$;

к) $y = (\sqrt{x})^{\sin x}$.

З а д а н и е . Найти первые производные функций.

14. *а)* $y = 12x^{14} + \dfrac{14}{x^2} - \sqrt[12]{x}$;

б) $y = \sqrt[3]{x^2 + 3x}$;

в) $y = \dfrac{x}{x^2+2}$;

г) $y = \ln(2x^3 + 3x^2)$;

д) $y = 5^{\frac{x}{x+1}}$;

е) $y = 8x \cdot e^{-x^2}$;

ж) $y = (3x+1)^5 \cdot \cos 3x$;

з) $y = \dfrac{\sin x}{3\cos^2 x}$;

и) $y = \mathrm{arctg}^2 e^x$;

к) $y = x^{\ln^2 x}$.

З а д а н и е . Найти первые производные функций.

15. *а)* $y = x^{15} + \dfrac{15}{x^2} - \sqrt{x}$;

б) $y = (5x + x^3) \cdot \ln x^2$;

в) $y = \dfrac{x \cdot \cos x}{1 - \sin x} + 2\sin 4x + 4$;

г) $y = \arccos\dfrac{1}{2x^2}$;

д) $y = 0{,}7^{\mathrm{arctg}\, x}$;

е) $y = \cos(10x + x^3)$;

ж) $y = (1 + \sqrt[3]{x})^3$;

з) $y = \dfrac{7 - \cos 3x}{5 + \sin 5x}$;

и) $y = \ln(4 + \sin 4x)$;

к) $y = x^{\sin\sqrt{x}}$.

З а д а н и е . Найти первые производные функций.

16. *а)* $y = 2x^5 + \dfrac{5}{x^2} - \sqrt[5]{2x}$;
б) $y = \sqrt[3]{\cos^2 x + x^2}$;
в) $y = \dfrac{x^3}{\sqrt{1+x^3}}$;
г) $y = x \cdot \arccos x - \sqrt{2 - x^3}$;
д) $y = 7^{\ln^2 x}$;
е) $y = (3x + 2) \cdot \sin 3x$;
ж) $y = \ln^2 \operatorname{tg} 2x$;
з) $y = \dfrac{\cos x}{\sin^2 x} + \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$;
и) $y = \arcsin(e^{7x})$;
к) $y = (\sin 2x)^x$.

Задание. Найти первые производные функций.

17. *а)* $y = x^7 + \dfrac{7}{x^3} - \sqrt[3]{7x}$;
б) $y = \dfrac{\sin x}{1 + \ln \sin x}$;
в) $y = (5 + x^3)^2 \cdot e^{-x}$;
г) $y = 2\sqrt{4x} - \dfrac{4}{\sqrt[3]{x^2+5}}$;
д) $y = 7^{\sqrt{\cos x}}$;
е) $y = e^x \cdot \sin 2x$;
ж) $y = \operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{3-x}{x-2}}$;
з) $y = \sqrt[3]{x + \sqrt[3]{x}}$;
и) $y = \cos(3^x)$;
к) $y = (\arcsin x)^{(x^2)}$.

Задание. Найти первые производные функций.

18. *а)* $y = x^5 + \dfrac{5}{x^3} - \sqrt[3]{5x}$;
б) $y = \dfrac{2\sin 5x}{1 - \cos 3x}$;
в) $y = \arcsin(\cos x^2) + x^2$;
г) $y = 2\operatorname{tg}^3(x^3 + 2)$;
д) $y = 2^{\sin 3x}$;
е) $y = (x^2 + 6) \cdot \ln 3x$;
ж) $y = \dfrac{x^2}{1-x} + \dfrac{9x+8}{x^3}$;
з) $y = e^{3x} \cdot \cos 3x$;
и) $y = \operatorname{arctg}^2 \dfrac{1}{x}$;
к) $y = (x+1)^{(x^2)}$.

Задание. Найти первые производные функций.

19. *а)* $y = 7x^2 + \dfrac{x^5}{5} - \sqrt[5]{x}$;
б) $y = \ln \operatorname{ctg}^3 x$;
в) $y = \dfrac{x^7}{x^5 - 2}$;
г) $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2 x + 2)$;
д) $y = 2^{\frac{x}{1+x}} + 7^{\cos 2x}$;
е) $y = \sin^2 6x + 3x^2$;
ж) $y = \sqrt{3x} \cdot \arcsin x^2$;
з) $y = \dfrac{1 + e^{2x}}{1 - e^{4x}}$;
и) $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 2x + 3})$;
к) $y = (\sin \sqrt{x})^x$.

З а д а н и е. Найти первые производные функций.

20. *а)* $y = x^7 - \dfrac{x^6}{6} + \sqrt[6]{x}$;

б) $y = \sqrt{x} - \operatorname{arctg}\sqrt{x}$;

в) $y = 3x \cdot \sin^3 x - \cos^3 x$;

г) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$;

д) $y = \ln^2 \sin 3x$;

е) $y = 2\ln \operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}$;

ж) $y = \dfrac{x}{6(x+1)}$;

з) $y = \arcsin(e^{-4x})$;

и) $y = 5^{\frac{1-x}{1+x}} + 3^{\cos 4x}$;

к) $y = (3x)^{e^x}$.

З а д а н и е. Найти первые производные функций.

21. *а)* $y = x^5 - \dfrac{1}{x^5} + \sqrt[5]{x}$;

б) $y = \sqrt{x + 2\sqrt{x}}$;

в) $y = \sqrt{x} \cdot e^{\sqrt{x}} + 5^{\cos 4x}$;

г) $y = \operatorname{arctg}(7\sin 3x)$;

д) $y = \sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}$;

е) $y = \dfrac{x^2}{1+x^2} + \dfrac{2+6x}{x^3}$;

ж) $y = \ln^2 \operatorname{arctg} x$;

з) $y = \dfrac{\cos x}{\sin^2 x} + \ln(\operatorname{tg}\dfrac{x}{2})$;

и) $y = (\sqrt{x})^{\cos x}$;

к) $y = \dfrac{x^2}{1+x^3}$.

З а д а н и е. Найти первые производные функций.

22. *а)* $y = \sqrt[4]{x^3} + \dfrac{5}{x^2} - \dfrac{3}{x^3} + 2$;

б) $y = \operatorname{tg}(x^2+3)$;

в) $y = x^{\cos^2 x}$;

г) $y = \ln \operatorname{tg}(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{x}{2})$;

д) $y = x^2 \cdot \arcsin(9x+2)$;

е) $y = \dfrac{1+2\cos 3x}{1-\cos 2x}$;

ж) $y = (0{,}9)^{\sqrt{x}}$;

з) $y = \sin^3 \dfrac{x}{3} + \cos x$;

и) $y = 0{,}7^{(x^5)}$;

к) $y = x\sqrt{x} \cdot (3\ln x - 2)$.

З а д а н и е. Найти первые производные функций.

23. *а)* $y = \sqrt[3]{x^2} - \dfrac{4}{x} - \dfrac{3}{x^2} + 3$;

б) $y = \sqrt{2x - \sin 2x}$;

в) $y = \sin^4 x + x^2 \cdot \cos^2 x$;

г) $y = \ln\sqrt{\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}}$;

е) $y = e^{-x^2}$;

ж) $y = 3\operatorname{tg}^6 x + 7$;

з) $y = 4x \cdot \operatorname{arctg}(2x+9)$;

и) $y = \dfrac{x^2}{(x-3)^2}$;

д) $y = 5^{\cos x^2}$; *к*) $y = \left(\frac{1}{x}\right)^{\arccos x}$.

З а д а н и е . Найти первые производные функций.

24. *а*) $y = \sqrt[3]{x^2} - \frac{3}{x^3} + \frac{2}{x^2} + 1$; *е*) $y = \operatorname{tg}(x^2 + \cos x)$;

б) $y = \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}$; *ж*) $y = \sqrt{\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}}$;

в) $y = \sqrt[3]{x} \cdot \operatorname{arctg} x$; *з*) $y = \frac{1}{2}(\sqrt{1 - x^2} + \arcsin x)$;

г) $y = (x^2 - x^3) \cdot e^{-x}$; *и*) $y = 3x^3 + \ln^3 x$;

д) $y = 15^{\ln^2 x}$; *к*) $y = (\sqrt{x})^{\operatorname{arctg} x}$.

З а д а н и е . Найти первые производные функций.

25. *а*) $y = 3x^5 - \frac{1}{x^5} + \frac{1}{x^4} + 2$; *е*) $y = \sqrt{1 + x^2} + 5^{\cos 3x}$;

б) $y = \operatorname{tg} x + \frac{2}{3}\operatorname{tg}^3 x + \frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x$; *ж*) $y = \ln^2 \sin x$;

в) $y = x^3 \cdot (x - 5\cos x)^2$ *з*) $y = \arccos\frac{9 - x^2}{9 + x^2}$;

г) $y = \frac{x + \sqrt{x}}{x - 2\sqrt[3]{x}}$; *и*) $y = (1 + 9x) \cdot e^{-x^2}$;

д) $y = 5^{\sin 3x}$; *к*) $y = (1 + x)^{\cos x}$.

З а д а н и е . Найти первые производные функций.

26. *а*) $y = 4x^2 - \frac{3}{2x^2} + \sqrt[3]{x}$; *е*) $y = \ln(2x - 3)$;

б) $y = \frac{2 + e^{3x}}{9 - e^{-4x}} \cdot x^2$; *ж*) $y = \frac{3 + \sin 4x}{8 - \cos 3x}$;

в) $y = \operatorname{arctg}(x^2 + e^{3x})$; *з*) $y = (2x^3 + 5)^4 \cdot x^3$;

г) $y = \ln \operatorname{tg}(5x + 1)$; *и*) $y = \sin 5x + \cos 3x^3$;

д) $y = 3^{\ln 3x}$; *к*) $y = x^{\frac{2}{x}}$.

Форма отчета: задачи

Самостоятельная работа №6

Тема: Решение задач по интегральному исчислению функций нескольких действительных переменных

Цель: научиться вычислять двойные интегралы в случае области 1 и 2 типа; научиться решать задачи на приложения двойных интегралов

Методические указания:

Теоретический материал и методические указания к выполнению заданий

1. Определение двойного интеграла

Пусть в замкнутой области *D* плоскости *xOy* задана непрерывная функция $z = f(x, y)$. Разобьем область *D* произвольным образом на *n* элементарных областей, имеющих площади ΔS_1, ΔS_2, …, ΔS_n и диаметры d_1, d_2, …, d_n (под диаметром области понимается наибольшее расстояние между двумя точками границы этой области). Выберем в каждой элементарной области произвольную точку $M_i(x_i, y_i)$ и умножим значение функции в точке M_i на площадь этой области.

<u>**Определение**</u>: Выражение вида

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i \tag{1}$$

называется ***интегральной суммой*** для функции $f(x, y)$ по области *D*.

Пусть $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} d_i \cdot$

<u>**Определение**</u>: ***Двойным интегралом от функции*** $f(x, y)$ ***по области D*** называется предел интегральной суммы (1) при $\lambda \to 0$, если этот предел существует, конечен и не зависит от способа разбиения *D* на элементарные области и от выбора в них точек M_i.

Обозначение: $\iint\limits_D f(x, y)dS = \iint\limits_D f(x, y)dxdy = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i \cdot$

2. Геометрический и физический смыслы двойного интеграла

Объем цилиндрического тела, ограниченного сверху непрерывной поверхностью $z = f(x, y) \ge 0$, снизу плоскостью $z = 0$ и сбоку цилиндрической поверхностью (образующие которой параллельны оси *Oz*), вырезающей на плоскости *xOy* область *D*, вычисляется по формуле

$$V = \iint\limits_D f(x, y)dxdy \cdot \tag{2}$$

Масса тонкой пластинки, занимающей область *D*, с непрерывно распределенной поверхностной плотностью $\rho = \rho(x, y)$ определяется по формуле

$$m = \iint\limits_D \rho(x, y)dxdy \cdot \tag{3}$$

3. Основные свойства двойного интеграла:

1. $\iint\limits_D [f(x,y) \pm g(x,y)]dS = \iint\limits_D f(x,y)dS \pm \iint\limits_D g(x,y)dS \cdot$

2. $\iint\limits_D cf(x,y)dS = c\iint\limits_D f(x,y)dS$, где c – постоянная.

3. Если $D = D_1 \cup D_2$, $D_1 \cap D_2 = \varnothing$, то

$\iint\limits_D f(x,y)dS = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dS + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dS \cdot$

4. $\iint\limits_D dS = \iint\limits_D dxdy = S_D$, где S_D *– площадь области интегрирования D*.

4. Вычисление двойного интеграла в декартовых координатах

Область D называется *правильной в направлении оси Oy* (*Ox*), если любая прямая, параллельная оси *Oy* (*Ox*) и проходящая через внутреннюю точку области *D*, пересекает ее границу в двух точках.

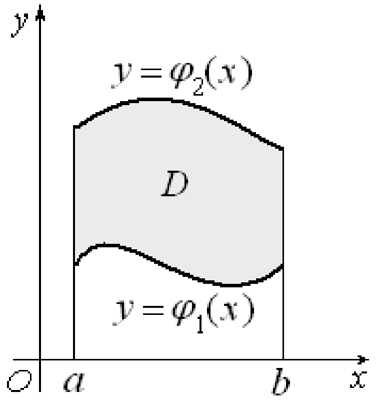


Рис. 1

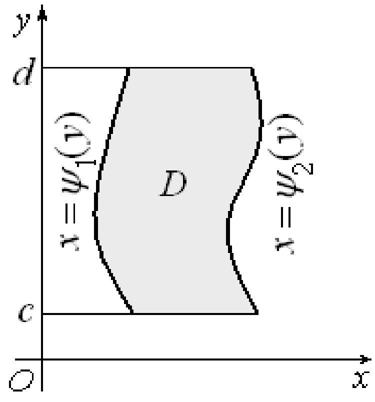


Рис. 2

Граница области *D*, правильной в направлении оси *Oy* (рис. 1), может быть задана уравнениями: $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$ $(\varphi_1(x) \le \varphi_2(x))$, $x = a$, $x = b$ $(a < b)$ и двойной интеграл в этом случае вычисляется по формуле:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy, \qquad (4)$$

причем сначала вычисляется внутренний интеграл $\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$, в котором интегрирование ведется по переменной *y*, а переменная *x* считается постоянной (как и любое выражение *p*(*x*), зависящее только от *x*).

Граница области *D*, правильной в направлении оси *Ox* (рис. 2), может быть задана уравнениями: $x = \psi_1(y)$, $x = \psi_2(y)$ $(\psi_1(y) \le \psi_2(y))$, $y = c$, $y = d$ $(c < d)$ и двойной интеграл в этом случае вычисляется по формуле:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d \left(\int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx \right) dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx \cdot \qquad (5)$$

<u>Определение</u>: Правые части формул (4) и (5) называются ***повторными*** (или ***двукратными***) интегралами.

Если область D правильная в направлении Ox и Oy (*правильная область*), то применимы обе формулы.

В общем случае область D разбивают на конечное число частей, являющихся правильными, и вычисляют для каждой из частей интеграл по формуле (4) или (5). Интеграл по всей области (свойство 3) равен сумме полученных интегралов.

<u>Пример 1</u>. Вычислить $\iint\limits_D xdxdy$, если область D ограничена линиями $y=0$, $y=x^2$, $x+y=2$.

Решение.

Решение разбивается на три этапа: 1) построение области D; 2) переход к повторному интегралу, расстановка пределов интегрирования; 3) вычисление повторного интеграла.

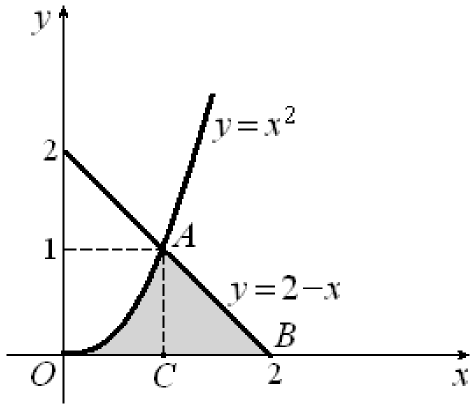


Рис. 3

Построим область D. Первая линия – ось Ox, вторая – парабола с вершиной в точке (0; 0), третья – прямая, проходящая через точки (0; 2) и (2; 0) (рис. 3). Решая систему $\begin{cases} y=x^2, \\ x+y=2, \end{cases}$ находим точки пересечения параболы и прямой: (1; 1) и (–2; 4), (–2; 4)$\notin D$. Так как область правильная, то можно воспользоваться любой из формул (4) или (5).

При решении по формуле (4) область придется разбить на две: OAC и CAB, так как линия OAB задается разными уравнениями:

$$\iint\limits_D xdxdy=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{x^2} xdy+\int\limits_1^2 dx\int\limits_0^{2-x} xdy\cdot$$

При вычислении по формуле (5) приходим к одному повторному интегралу:

$$\iint\limits_D xdxdy=\int\limits_0^1 dy\int\limits_{\sqrt{y}}^{2-y} xdx\cdot$$

Закончим решение, пользуясь последней формулой. Вычислим внутренний интеграл:

$$\int\limits_{\sqrt{y}}^{2-y} xdx=\frac{x^2}{2}\Bigg|_{\sqrt{y}}^{2-y}=\frac{1}{2}\left((2-y)^2-\left(\sqrt{y}\right)^2\right)=\frac{1}{2}\left(4-4y+y^2-y\right)=\frac{1}{2}\left(4-5y+y^2\right)\cdot$$

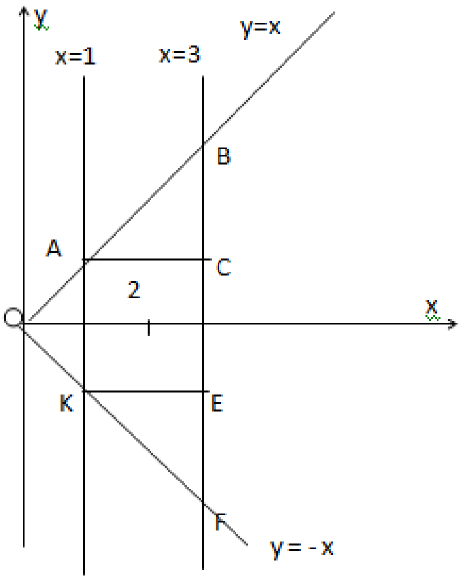
Тогда

$$\iint\limits_D xdxdy=\int\limits_0^1\frac{1}{2}\left(4-5y+y^2\right)dy=\frac{1}{2}\int\limits_0^1\left(4-5y+y^2\right)dy==\frac{1}{2}\left(4y-\frac{5y^2}{2}+\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{2}\left(4-\frac{5}{2}+\frac{1}{3}\right)=\frac{11}{12}\cdot$$

Сведение двойных интегралов к повторным в случае областей 1-го и 2-го типов. Изменение порядка интегрирования»

__Пример:__ Изменить порядок интегрирования в двойном интеграле $\int\limits_1^3 dx \int\limits_{-x}^{x} f(x,y)dy$.

Решение. Вычисление этого интеграла производится повторным интегрированием: сначала вычисляется интеграл $\int\limits_{-x}^{x} f x,y)dy$, а затем, получившаяся функция интегрируется по переменной x на отрезке [1;3]. Для изменения порядка интегрирования необходимо сначала начертить область интегрирования **D**, которая ограничена линиями x=1, x=3, y=-x, y= -x. Уравнения линий берутся в соответствии с пределами интегрирования. На рисунке область **D** – это трапеция ABFK. Координаты точек A,B,F,K находим, решая соответствующие системы уравнений. Таким образом получили A(1;1), B(3;3), F(3,-3), K(1;-1). При изменении порядка интегрирования первое интегрирование теперь проводится по переменной y, а второе -–по переменной x. В этом случае при задании области **D** переменная y изменяется от –3 до 3, а переменная x от линии FKAB до линии FB. Если прямая FB задается одним уравнением x=3, то ломаная FKAB – тремя: x=1, y=-x, y= -x. Таким образом, область интегрирования **D** имеет смысл представить как объединение трех областей, каждая из которых задается своей системой неравенств:



FKE: $-3 \le y \le -1,\ -y \le x \le 3,$

KACE: $-1 \le y \le 1,\ 1 \le x \le 3,$

ACB: $1 \le y \le 3,\quad y \le x \le 3$.

Нашли, что исходный двойной интеграл после замены порядка интегрирования записывается в виде суммы трех двойных интегралов:

$$\int\limits_{-3}^{-1} dy \int\limits_{-y}^{3} f(x,y)dx + \int\limits_{-1}^{1} dy \int\limits_{1}^{3} f(x,y)dx + \int\limits_{1}^{3} dx \int\limits_{y}^{3} f(x,y)dy$$

Приложения двойных интегралов

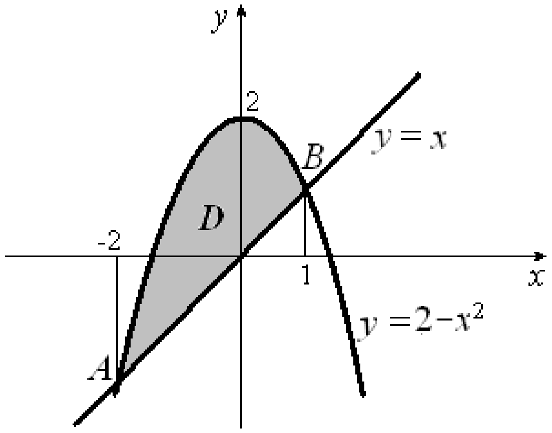
7.2.2 1. Геометрический смысл двойного интеграла

Пусть функция $f(x,y)$ принимает в области D только положительные значения. Тогда двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma$ численно равен объему V вертикального цилиндрического тела, построенного на основании D и ограниченного сверху соответствующим куском поверхности $z = f(x,y)$.

2. Вычисление площадей

$$S = \iint\limits_D 1\,dS.$$

Пример*:* Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = x$ и $y = 2 - x^2$.



Решение.

Определим точки пересечения линий: $\begin{cases} y = 2 - x^2, \\ y = x. \end{cases}$ Получим: $A(-2; -2)$, $B(1; 1)$ (рис.).

Тогда искомая площадь:

$$S_D = \iint\limits_D dxdy = \int\limits_{-2}^{1} dx \int\limits_{x}^{2-x^2} dy =$$

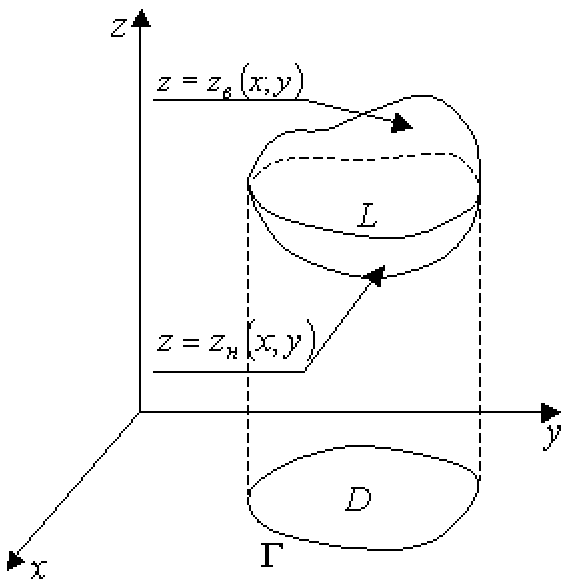
$$= \int\limits_{-2}^{1} y\Big|_x^{2-x^2} dx = \int\limits_{-2}^{1} \left(2 - x^2 - x\right) dx =$$

$$= \left(2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-2}^{1} = \left(2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) - \left(-4 + \frac{8}{3} - \frac{4}{2}\right) = \frac{9}{2}$$ (кв. ед.).

3. Вычисление объёмов тел

Пусть тело V ограничено сверху — только одной поверхностью $z = z_в(x; y)$; снизу — только одной поверхностью $z = z_н(x; y)$. Линия L пересечения этих поверхностей проектируется в границу $Г$ области D, на которой заданы непрерывные функции

$$z = z_в(x; y),\ z = z_н(x; y).$$



При этих условиях:

$$V = \iint\limits_D \left(z_в(x;y) - z_н(x;y)\right) dS. \tag{2.17}$$

Доказательство формулы (2.17) легко провести на основе геометрического смысла двойного интеграла.

Пример: Найти объем тела V, ограниченного поверхностями y = x2, y = 1, z = 0, $z = x^2 + y^2$.

Решение: Так как данное тело представляет собой цилиндрическое тело с основанием σ, ограниченное сверху параболоидом z = x2 + y2, то имеем:

$$V = \iint\limits_\sigma (x^2 + y^2)dxdy = 2\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{\sqrt{y}} (x^2 + y^2)dx = 2\int\limits_0^1 \left(\frac{1}{3}y^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{5}{2}}\right)dy = \frac{88}{105}.$$

Пример: Найти объем тела V, вырезаемого из бесконечной призмы с гранями $x = \pm 1, y = \pm 1$ параболоидами $x^2 + y^2 = 4 - z,\ x^2 + y^2 = 4(z+2)$.

Решение: Объем тела V находим как сумму объемов V_1 и V_2 его частей, лежащих соответственно над и под плоскостью XOY. При этом

$$V_1 = \iint_\sigma (4 - x^2 - y^2)dxdy = 4\int_0^1 dx \int_0^1 (4 - x^2 - y^2)dy = 4\int_0^1 \left(4 - x^2 - \frac{1}{3}\right)dx = \frac{40}{3},$$

$$V_2 = -\iint_\sigma \left(\frac{x^2 + y^2}{4} - 2\right)dxdy = -4\int_0^1 dx \int_0^1 \left(\frac{x^2 + y^2}{4} - 2\right)dy = \frac{22}{3}.$$

$$V = V_1 + V_2 = \frac{62}{3}.$$

4. Площадь поверхности

Площадь поверхности, заданной уравнением $z = f(x, y)$:

$$S = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dxdy.$$

Варианты заданий

1. Вычислить двойной интеграл по области D, ограниченной указанными линиями.

   a. $$\iint_D \left(18x^2y^2 + 24xy\right)dxdy$$
   $$D: x = 1;\ y = -\sqrt[3]{x};\ y = x^3$$

   b. $$\iint_D \left(3x^2y^2 + 4xy\right)dxdy$$
   $$D: x = 1;\ y = -\sqrt{x};\ y = x^2$$

2. Изменить порядок интегрирования в двойных интегралах:

a) $\int\limits_{-4}^{1} dx \int\limits_{-3x}^{4-x^2} f(x,y)dy$	b) $\int\limits_{-1}^{3} dy \int\limits_{y^2-3}^{2y} f(x,y)dx$	c) $\int\limits_{-5}^{-1} dx \int\limits_{x^2+5}^{-6x} f(x,y)dy$
d) $\int\limits_{1}^{2} dx \int\limits_{x}^{2x} f(x,y)dy$	e) $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x,y)dy$	f) $\int\limits_{-1}^{6} dx \int\limits_{5x}^{6-x^2} f(x,y)dy$
g) $\int\limits_{1}^{2} dx \int\limits_{2x}^{8/x} f(x,y)dy$	h) $\int\limits_{-5}^{1} dx \int\limits_{x^2-5}^{-4x} f(x,y)dy$	i) $\int\limits_{-0,5}^{1,5} dx \int\limits_{2x^2-6}^{4x} f(x,y)dy$
j) $\int\limits_{0}^{4} dx \int\limits_{x-4}^{4-x} f(x,y)dy$	k) $\int\limits_{-2}^{3} dx \int\limits_{x}^{6-x^2} f(x,y)dy$	l) $\int\limits_{2}^{4} dx \int\limits_{2x-8}^{-2x^2+12x-16} f(x,y)dy$

3. Найти объем тела V, ограниченного поверхностями y = x2, y = 1, z = 0, $z = x^2 + y^2$.
4. Найти объем тела V, вырезаемого из бесконечной призмы с гранями $x = \pm 1, y = \pm 1$ параболоидами $x^2 + y^2 = 4 - z,\ x^2 + y^2 = 4(z+2)$.

Форма отчета: защита

3. КРИТЕРИИ ОЦЕНКИ ВЫПОЛНЕНИЯ САМОСТОЯТЕЛЬНЫХ РАБОТ

РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ОФОРМЛЕНИЮ ЗАДАЧ

Задача - упражнение, которое выполняется посредством умозаключения, вычисления.

Решение задач — процесс выполнения действий или мыслительных операций, направленный на достижение цели, заданной в рамках проблемной ситуации.

Структура и оформление.

1. Формулировка задачи.
2. Дано.
3. Решение.
4. Ответ.

Критерии оценки решения задачи.

Оценку 5 (отлично) заслуживает студент, обнаруживший всесторонне, систематическое и глубокое знание учебно-программного материала, умения свободно решать задачу, изучивший основную и знакомый с дополнительной литературой, рекомендованной рабочей программой, усвоивший взаимосвязь основных понятий и терминов учебной дисциплины в их значении для приобретаемой специальности, проявивший творческие способности в понимании, изложении и использовании учебно-программного материала;

Оценку 4 (хорошо) заслуживает студент, обнаруживший полное знание учебно-программного материала, успешно решивший задачу, усвоивший основную литературу, рекомендованную в рабочей программе, показавший систематический характер знаний по учебной дисциплине и способный к их самостоятельному пополнению и обновлению в ходе дальнейшей учебной работы и профессиональной деятельности;

Оценку 3 (удовлетворительно) заслуживает студент, обнаруживший знания основного учебно- программного материала в объеме, необходимом для дальнейшей учебной и профессиональной деятельности, справляющейся с решением задачи, допустивший погрешности в решении и в ответе, но обладающий необходимыми знаниями, умениями для их устранения под руководством преподавателя;

Оценку 2 (неудовлетворительно) заслуживает студент, обнаруживший пробелы в знаниях учебно- программного материала, допустивший принципиальные ошибки при решении задачи**.**

4. ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ

4.1. Печатные издания:

4.1 Печатные издания:

Основные:

О-1 *Ельчанинова, Г. Г. Элементы высшей математики. Типовые задания с примерами решений: учебное пособие / Г. Г. Ельчанинова, Р. А. Мельников. — Санкт-Петербург: Лань, 2020. — 92 с.*

О-2 Шевелев, Ю. П. Дискретная математика: учебное пособие / Ю. П. Шевелев. — 4-е изд., стер. — Санкт-Петербург: Лань, 2019. — 592 с.

Дополнительные:

Д-1 Григорьев В.П., Дубинсий Ю.А. Элементы высшей математики: Учебник / Григорьев В.П., Дубинсий Ю.А. – М.: Форум, 2008 – 252 с.

Д-2 Богомолов Н.В. Практические занятия по математике: Учебник / Богомолов Н.В. – М.: Высшая школа, 2000 – 283 с.

Электронные издания (электронные ресурсы):

1. Григорьев В.П., Дубинсий Ю.А. Элементы высшей математики: Учебник / Григорьев В.П., Дубинсий Ю.А. – М.: ИЦ Академия, 2019. – 256 с.

2. Комогорцев В.Ф. Высшая математика: Учебник / В.Ф. Комогорцев - Брянск: Изд-во Брянский ГАУ, 2018. – 259 с. - ЭБС Академия;

3. www.school-collection.edu.ru – единая коллекции Цифровых образовательных ресурсов.

ЛИСТ ИЗМЕНЕНИЙ И ДОПОЛНЕНИЙ, ВНЕСЕННЫХ В МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ[1]

<table>
<tr><td colspan="2">№ изменения, дата внесения, № страницы с изменением</td></tr>
<tr><td>Было</td><td>Стало</td></tr>
<tr><td colspan="2">Основание:

Подпись лица, внесшего изменения</td></tr>
</table>

[1] Данный раздел выносится на отдельную страницу