ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ИРКУТСКОЙ ОБЛАСТИ «ЧЕРЕМХОВСКИЙ ГОРНОТЕХНИЧЕСКИЙ КОЛЛЕДЖ ИМ. М.И. ЩАДОВА»

Рассмотрено на
заседании ЦК
«04» 06 2020 г.
Протокол № 10
Председатель
_________ Т.В.Окладникова

УТВЕРЖДАЮ
Зам. директора по УР
_________ Н.А. Шаманова
«23» 06 2020г.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

для выполнения
практических работ студентов
по учебной дисциплине

ЕН. 02 ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

программы подготовки специалистов среднего звена

09.02.04 Информационные системы (по отраслям)

Разработал преподаватель: Коровина Н.С.

2020 г.

СОДЕРЖАНИЕ

		СТР.
1.	ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА	3
2.	ПЕРЕЧЕНЬ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ	5
3.	СОДЕРЖАНИЕ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ	6
4.	ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ	48
5.	ЛИСТ ИЗМЕНЕНИЙ И ДОПОЛНЕНИЙ ВНЕСЁННЫХ В МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ	49

1.ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Методические указания по выполнению практических (лабораторных) работ по учебной дисциплине **«Элементы математической логики»** предназначены для студентов специальности **09.02.04 Информационные системы (по отраслям),** составлены в соответствии с рабочей программой дисциплины «**Элементы математической логики»**» и направлены на достижение следующих целей:

– формирование у студентов представлений о роли элементов математической логики в современном обществе;

– формирование у студентов умений осуществлять поиск и использование информации, необходимой для эффективного выполнения профессиональных задач, профессионального и личностного развития;

– приобретение студентами опыта использования элементов математической логики в индивидуальной и коллективной учебной и познавательной деятельности;

Методические указания являются частью учебно-методического комплекса по дисциплине «**Элементы математической логики**» и содержат задания, указания для выполнения практических (лабораторных) работ, теоретический минимум и т.п. Перед выполнением практической работы каждый студент обязан показать свою готовность к выполнению работы:

- ответить на теоретические вопросы преподавателя.

По окончанию работы студент оформляет отчет в тетради и защищает свою работу.

В результате выполнения полного объема практических работ студент должен у**меть:**

— формулировать задачи логического характера и применять средства математической логики для их решения;

— применять логику предикатов к анализу рассуждений.

При проведении практических работ применяются следующие технологии и методы обучения:

1. проблемно-поисковых технологий
2. тестовые технологии

Правила выполнения практических работ:

1. Запомните порядок проведения практических работ, правила их оформления.
2. Изучите теоретические аспекты практической работы
3. Выполните задания практической работы.
4. Оформите отчет в тетради.

Требования к рабочему месту:

– посадочные места по количеству студентов,

– рабочее место преподавателя,

– дидактическое обеспечение дисциплины:

– сборник практических работ

– сборник заданий для самостоятельной работы студентов

– таблицы, чертежные инструменты.

Технические средства обучения:

– Интерактивная доска, компьютер, диапроектор.

Критерии оценки:

Оценки «5» (отлично) заслуживает студент, обнаруживший при выполнении заданий всестороннее, систематическое и глубокое знание учебно - программного материала, учения свободно выполнять профессиональные задачи с всесторонним творческим подходом, обнаруживший познания с использованием основной и дополнительной литературы, рекомендованной программой, усвоивший взаимосвязь изучаемых и изученных дисциплин в их значении для приобретаемой специальности, проявивший творческие способности в понимании, изложении и использовании учебно- программного материала, проявивший высокий профессионализм, индивидуальность в решении поставленной перед собой задачи, проявивший неординарность при выполнении практического задания.

Оценки «4» (хорошо) заслуживает студент, обнаруживший при выполнении заданий полное знание учебно- программного материала, успешно выполняющий профессиональную задачу или проблемную ситуацию, усвоивший основную литературу, рекомендованную в программе, показавший систематический характер знаний, умений и навыков при выполнении теоретических и практических заданий по дисциплине «Математика».

Оценки «3» (удовлетворительно) заслуживает студент, обнаруживший при выполнении практических и теоретических заданий знания основного учебно-программного материала в объеме, необходимом для дальнейшей учебной и профессиональной деятельности, справляющийся с выполнением заданий, предусмотренных программой, допустивший погрешности в ответе при защите и выполнении теоретических и практических заданий, но обладающий необходимыми знаниями для их устранения под руководством преподавателя, проявивший какую-то долю творчества и индивидуальность в решении поставленных задач.

Оценки «2» (неудовлетворительно) заслуживает студент, обнаруживший при выполнении практических и теоретических заданий проблемы в знаниях основного учебного материала, допустивший основные принципиальные ошибки в выполнении задания или ситуативной задачи, которую он желал бы решить или предложить варианты решения, который не проявил творческого подхода, индивидуальности.

В соответствии с учебным планом программы подготовки специалистов среднего звена по специальности **09.02.04 Информационные системы (по отраслям)** и рабочей программой на практические (лабораторные) работы по дисциплине «**Элементы математической логики**» отводится 38 часов.

2. ПЕРЕЧЕНЬ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

№ п/п	Название практической работы	Количество часов
1	**Практическое занятие № 1** Решение задач с использованием равносильные формулы логики высказываний.	4
2	**Практическое занятие № 2** Решение задач с использованием тавтологии и противоречия.	4
3	**Практическое занятие № 3** Решение задач с использованием операций над множествами	2
4	**Практическое занятие № 4** Приведение формул логики высказываний к виду ДНФ, КНФ	2
5	**Практическое занятие № 5** Приведение формул логики высказываний к виду СДНФ, СКНФ	2
6	**Практические занятия № 6** Приведение формул логики высказываний к виду ДНФ, КНФ, СДНФ, СКНФ	2
7	**Практические занятия № 7** Определение математических основ теории алгоритмов	4
8	**Практические занятия № 8** Применение логики предикатов к анализу рассуждений**.**	4
9	**Практические занятия № 9** Анализ модели данной сигнатуры. Вычисление значений формулы логики предикатов в данной модели.	4
10	**Практические занятия № 10** Применение языка логики предикатов для записи математических предложений, определений. Построение отрицаний.	4
11	**Практические занятия № 11** Анализ аксиоматической теории. Построение выводов формул и теорем в исчислении высказываний.	2
12	**Практические занятия № 12** Анализ теории первого порядка.	2
13	**Практические занятия № 13** Решение задач с использованием теории первого порядка.	2
	Итого	**38**

3. СОДЕРЖАНИЕ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

Практическая работа № 1
Решение задач с использованием равносильные формулы логики высказываний.

Цель: научиться решать задачи с использованием равносильные формулы логики высказываний.

Задание 1. Решить следующие задачи:
Задача 1. Вычислите логические значения следующих высказываний:
1) (2 = 2) И (7 = 7);
2) Не(15 < 3);
3) ("Сосна" = "Дуб") ИЛИ ("Вишня" = "Клён");
4) Не("Сосна" = "Дуб");
5) (Не(15 < 3)) И (10 > 20);
6) ("Глаза даны, чтобы видеть") И ("Под третьим этажом находится второй этаж");
7) (6/2 = 3) ИЛИ (7*5 = 20).
Задача 2. *Запишите с помощью логических операций следующие сложные высказывания:*
1) "Пользователь не зарегистрирован";
2) "Сегодня воскресенье и некоторые сотрудники находятся на работе";
3) "Пользователь зарегистрирован тогда и только тогда, когда отправленные пользователем данные признаны годными".
Решение.
1) p - одиночное высказывание "Пользователь зарегистрирован", логическая операция: $\sim p$;
2) p - одиночное высказывание "Сегодня воскресенье", q - "Некоторые сотрудники находятся на работе", логическая операция: $p \wedge q$;
3) p - одиночное высказывание "Пользователь зарегистрирован", q - "Отправленные пользователем данные признаны годными", логическая операция: $p \leftrightarrow q$.
Итог работы: решения задач, защита

Практическая работа № 2
Решение задач с использованием тавтологии и противоречия.

Цель: научиться решать задачи с использованием тавтологии и противоречия.

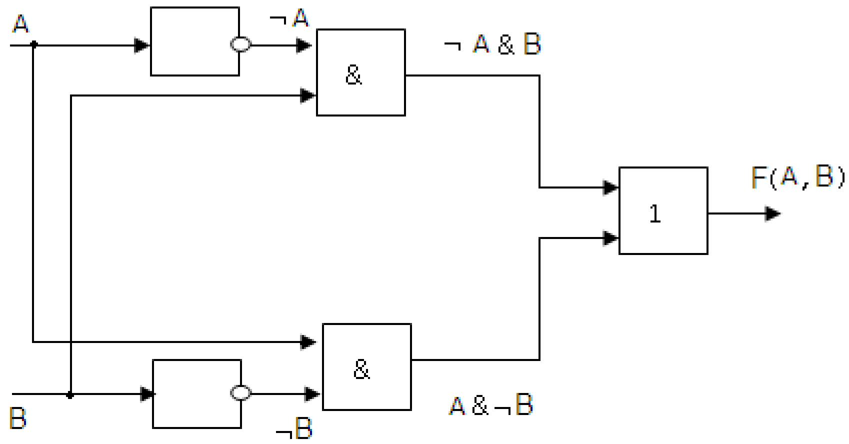
Задание 1. Решить следующие задачи:
Задача 1. Доказать, что формула $A \wedge B \to A$ является тавтологией
Задача 2. Составьте таблицы истинности для следующих формул: $(\overline{A} \to B) \leftrightarrow (A \leftrightarrow B)$; $(A \vee B \wedge C) \to (B \vee C)$.

Задание 2. Ответить на следующие вопросы*:*

1. Что такое тавтология? Приведите примеры тавтологий
2. Логические законы. Приведите перечень часто используемых логических законов: закона тождества, закона исключенного третьего, законов де Моргана , закона противоречия, закона идемпотентности, закона коммутативности, закона дистрибутивности и т.д.

Задание 3. По заданной логической функции $F(A,B) = \neg A \& B \vee A \& \neg B$ построить логическую схему.

1. Число логических переменных = 2 (А и В).
2. Количество операций = 5 (2 инверсии, 2 конъюнкции, 1 дизъюнкция). Сначала выполняются операции инверсии, затем конъюнкции, в последнюю очередь операция дизъюнкции.
3. Схема будет содержать 2 инвертора, 2 конъюнктора и 1 дизъюнктор.
4. Построение надо начинать с логической операции, которая должна выполняться последней. В данном случае такой операцией является логическое сложение, следовательно, на выходе должен быть дизъюнктор. На него сигналы подаются с двух конъюнкторов, на которые, в свою очередь, подаются один входной сигнал нормальный и один инвертированный (с инверторов).



Задание4. . Упростить логическое выражение $\neg(A \vee B) \wedge (A \& \neg B)$.

Согласно закону де Моргана: $\neg(A \vee B) \wedge (A \& \neg B) \vee A = \neg A \& \neg B \& (A \& \neg B) \vee A$.

Согласно сочетательному закону: $\neg A \& \neg B \& (A \& \neg B) \vee A = \neg A \& A \& \neg B \& \neg B \vee A$.

Согласно закону противоречия и закону идемпотентности: $\neg A \& A \& \neg B \& \neg B \vee A = 0 \wedge \neg B \& \neg B = 0 \& \neg B \vee A$.

Согласно закону исключения 0: $0 \& \neg B = 0$

Окончательно получаем $\neg(A \vee B) \wedge (A \& \neg B) \vee A = 0 \vee A = A$ /

Задание 5. Выполнить задание своего варианта.

Вариант 1

1. Составить таблицу истинности логического выражения $(A \& B) \leftrightarrow (\neg B \to \neg A)$ XOR A

2. Построить логическую схему функции $(\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee \neg A)$

3. Упростить логическое выражение $(\neg A \& B) \vee (A \& \neg B) \vee (A \& B)$

4. Определить, являются ли два высказывания эквивалентными A & ¬(¬B v C) и A & B & ¬C

5. Определить истинность или ложность высказываний (¬(X<5) v (X<3)) & (¬(X<2) v (X<1)) при X=1

Вариант 2

1. Составить таблицу истинности логического выражения $(\neg B \& A) \leftrightarrow (A \to \neg B)$ XOR B

2. Построить логическую схему функции $(A \& B) \vee ((A \vee B) \wedge \neg A)$

3. Упростить логическое выражение $\neg((\neg A \vee B) \& A) \wedge (\neg A \vee \neg B)$

4. Определить, являются ли два высказывания эквивалентными ¬(¬A & B v A & (B v ¬C)) и ¬B & (¬A v C)

5. Определить истинность или ложность высказываний (¬(X<5) v (X<3)) & (¬(X<2) v (X<1) при X=3

Вариант 3

1. Составить таблицу истинности логического выражения $\neg(B \vee A) \leftrightarrow (\neg A \to B)$ XOR A

2. Построить логическую схему функции $(\neg A \& \neg B) \vee (\neg A \& B)$

3. Упростить логическое выражение $(\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B) \wedge (B \vee A)$

4. Определить, являются ли два высказывания эквивалентными ¬C v ¬B v ¬(A v ¬C) и ¬A & B v ¬C & B

5. Определить истинность или ложность высказываний X>1 & (¬(X<5) v (X<3)) при X=2

Вариант 4

1. Составить таблицу истинности логического выражения $(\neg A \to \neg B) \leftrightarrow (B \& A)$ XOR B

2. Построить логическую схему функции $\neg((\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A))$

3. Упростить логическое выражение $\neg((\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A)) \vee (A \vee B)$

4. Определить, являются ли два высказывания эквивалентными ¬(A v ¬B) v ¬B & C и ¬A & (B ∨ C)

5. Определить истинность или ложность высказываний ¬((X>2) v (X<2)) v (X>4) при X=1

Вариант 5

1. Составить таблицу истинности логического выражения $(A \& B) \leftrightarrow (\neg A \& B)$ XOR B.

2. Построить логическую схему функции $\neg(A \& B) \vee (\neg(B \vee A))$

3. Упростить логическое выражение $\neg A \vee B \vee \neg(\neg B \vee A) \vee A \& B$

4. Определить, являются ли два высказывания эквивалентными

5. Определить истинность или ложность высказываний X>1 & (¬(X<5) v (X<3)) при X=2

Итог работы: решения задач, защита

Практическая работа № 3

Решение задач с использованием операций над множествами

Цель: Рассмотреть способы решение задач с использованием операций над множествами

Задание 1. Изучить теоретические сведения

Понятие "множество" является первичным и неопределяемым. Множество можно представить себе как совокупность элементов, обладающих некоторым общим свойством. Объекты любой природы (числа, люди, вещи и т. д.), составляющие множество, называют его элементами.

Для того чтобы некоторую совокупность элементов можно было назвать множеством, необходимо, чтобы выполнялись следующие условия:

- должно существовать правило, позволяющее определить, принадлежит ли указанный элемент данной совокупности;
- должно существовать правило, позволяющее отличать элементы друг от друга (это означает, что множество не может содержать двух *одинаковых* элементов).

Порядок элементов в множестве несущественен. Множества {*а, в, с*} и {*а, с, в*} одинаковы.

Множество может задаваться:

- путем перечисления его элементов. Обычно перечислением задают конечные множества;
- путем описания свойств, общих для всех элементов этого множества, и только этого множества. Это свойство называется характеристическим свойством, а такой способ задания множества описанием.

Множества бывают конечными или бесконечными. Если число элементов множества конечно – множество называется конечным.

Количество элементов, составляющих множество, называется мощностью множества.

Пустым множеством называют единственное множество, не содержащее ни одного элемента (обозначается символом ∅).

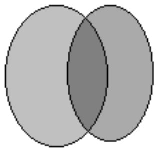
Множества *A* и *B* считают равными, если они состоят из одних и тех же элементов Пример 1. Равны следующие множества: *A*={>, $, @, !} и *B*={!, >, @, $}. Множество *B* называют подмножеством множества *A* тогда и только тогда, когда каждый элемент множества В принадлежит множеству А.

Часто бывает, что рассматриваются только подмножества одного и того же множества. Такое множество называют *универсальным* множеством, по предположению содержит все используемые нами множества (обозначают *U* и изображают на кругах Эйлера в виде прямоугольника).

Операции над множествами

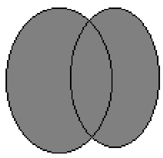
Основными операциями над множествами являются объединение, пересечение, разность и дополнение.

Пересечением множеств X и У называется множество, состоящее из всех тех, и только тех элементов, которые принадлежат и множеству X и множеству У.
Пример 2. X={1,2,3,4} У={2,4,6} пересечением {2,4}



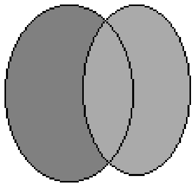
Множества называются непересекающимися, если не имеют общих элементов, т.е. их пересечение равно пустому множеству.
Пример 3. Непересекающимися множествами являются множества отличников группы и неуспевающих.
Свойства пересечения:
1. $X \cap Y = Y \cap X$ - коммутативности
2. $(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z) = X \cap Y \cap Z$ - ассоциативности
3. $X \cap \varnothing = \varnothing$
4. $X \cap I = X$

Объединением двух множеств называется множество, состоящее из всех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств X или У.
Пример 4. X={1,2,3,4} У={2,4,6} объединением {1,2,3,4,6}

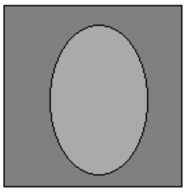


Свойства объединения:
1. XUY= YUY- коммутативности
2. (X UY)UZ =XU (YUZ)=XUYUZ - ассоциативности
3. XU$\varnothing$ = X
4. XUI = I

Из свойств операций пересечения и объединения видно, что пустое множество аналогично нулю в алгебре чисел.
Данная операция, в отличие от операций пересечения и объединения определена только для двух множеств. Разностью множеств X и У называется множество, состоящее их всех тех и только тех элементов, которые принадлежат X и не принадлежат У.
Пример 5. X={1,2,3,4} У={2,4,6} разность {1,3}



Определим множество, которое будет играть роль единицы в алгебре множеств
Дополнением множества X называется разность I и X.



Свойства дополнения:
1. Множество Х и его дополнение не имеют общих элементов
$X \cap \overline{X} = \varnothing$
2.Любой элемент I принадлежит или множеству Х или его дополнению.
$X \cup \overline{X} = I$
3. Из формулы 2 вытекает еще одно важное свойство
$\overline{\overline{X}} = X$

Понятие кортежа. Декартово произведение множеств

Упорядоченный набор, конечная последовательность каких-либо объектов, внешне связанных определенным положением, которое они занимают в данной совокупности объектов, называется упорядоченным множеством или кортежем. Объекты, входящие в кортеж называются компонентами. Число компонент кортежа называется его длиной. В отличие от множества в кортеже могут быть и одинаковые компоненты, и порядок расположения элементов важен.
Пример 6. Можно как кортеж рассматривать буквы в слове, слова в фразе, абзацы в тексте.
Декартовым произведением двух не пустых множеств Х и У называется множество ХхУ, состоящее из всех упорядоченных пар,

ХхУ = {(x,y) / $x \in X$; $y \in Y$)

Формула включения-исключения

Формула включения-исключения — комбинаторная формула, выражающая мощность объединения конечных множеств через мощности и мощности всех их возможных пересечений.
Для случая из двух множеств A, B формула включения-исключения имеет следующий вид:
$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
В силу того, что в сумме $|A| + |B|$ элементы пересечения $A \cap B$ учтены дважды, то уменьшаем текущее значение суммы на мощность пересечения, чтобы каждый элемент был подсчитан ровно один раз. Для наглядности воспользуемся диаграммой Эйлера—Венна для двух множеств, приведенной на рисунке справа.
Для случая с большим количеством рассматриваемых множеств n процесс нахождения количества элементов объединения состоит в поочередном включений ошибочно исключенного и исключений ошибочно включенного. Отсюда и происходит название формулы.

Задание 2. Разобрать пример решения задачи:
В первом классе читать умеют 12 учеников, считать – 8, писать – 9; читать и писать – 4, читать и считать – 5, писать и считать – 3; читать, писать и считать – 2; 6 учеников до сих пор ничему не научились. Сколько учеников в классе?

Пусть множество $|A|=12$ - множество учеников умеющих читать, $|B|=8$ - умеющих считать, $|C|=9$ - умеющих писать, тогда $|A\cap C|=4$ - читать и писать, $|A\cap B|=5$ - читать и считать, $|B\cap C|=3$ - считать и писать, а $|A\cap B\cap C|=2$ - читать и писать, При сложении $|A|+|B|+|C|$, мы получим $|A\setminus(B\cup C)| + |B\setminus(A\cup C)| +|C\setminus(B\cup A)|+ 2*|(A\cap C)\setminus B|+ 2*|(A\cap B)\setminus C|+ 2*|(C\cap B)\setminus A|+3*|A\cap B\cap C|$, значит нужно вычесть $|(A\cap C)\setminus B| + |(A\cap B)\setminus C| + |(C\cap B)\setminus A| + 2*|A\cap B\cap C|$(чтобы получить $|A\cup B\cup C|$) что равносильно $|A\cap C| + |A\cap B| + |C\cap B| - |A\cap B\cap C|$, значит ответ будет вида 8+9+12-3-4-5+2=19, Но мы не учли то, что у нас есть еще 6 учеников, не занятых ничем, значит ответ 19+6=25

Задания 3. Решите задачи своего варианта

Вариант 1

1. Назовите несколько элементов, принадлежащих множеству:
– чисел, кратных 7;
– непростых чисел, принадлежащих промежутку [22; 34].
2. Найдите $A \cap B$, AUB, A/B, если A = (–3; 7), B = (1; 8)
3. Решите задачи, используя формулу включений и исключений:
– в спортивном классе обучаются 24 человека. Каждый учащийся занимается хотя бы одним видом спорта (баскетболом или волейболом), из них баскетболом и волейболом занимаются 12 человек. Сколько человек занимается только волейболом, если их в 3 раза больше, чем тех, кто занимается только баскетболом?
– сколько целых чисел от 0 до 999 не делятся ни на 2, ни на 5, ни на 11?

Вариант 2

1. Назовите несколько элементов, принадлежащих множеству:
– квадратов натуральных чисел;
– чисел, кратных 5.
2. Найдите $A \cap B$, AUB, A/B, если A = [0; 5], B = [5; 8]
3. Решите задачи, используя формулу включений и исключений:
– староста класса, в котором 40 человек, подводил итоги по успеваемости группы за I полугодие. Получилась следующая картина: из 40 учащихся не имеют троек по русскому языку—25 человек, по математике — 28 человек, по русскому языку и математике — 16 человек, по физике — 31 человек, по физике и математике — 22 человека, по физике и русскому языку 16 человек. Кроме того, 12 человек учатся без троек по всем трем предметам. Классный руководитель, просмотрев результаты, сказал: «В твоих расчетах есть ошибка». Составьте диаграмму Эйлера–Венна и объясните, почему это так;
– сколько существует целых чисел от 1 до 1000, которые не делятся ни на 5, ни на 7?

Вариант 3

1. Назовите несколько элементов, принадлежащих множеству:
– простых чисел, принадлежащих промежутку [25; 43];
– чисел, обратных кубам натуральных чисел.
2. Найдите $A \cap B$, AUB, A/B, если A = (–3; +∞), B = (–10; 9);

3. Решите задачи, используя формулу включений и исключений:
– в лаборатории института работают несколько человек. Каждый из них знает хотя бы один иностранный язык. 7 человек знают английский, 7 — немецкий, 8 — французский, 5 знают английский и немецкий, 4 — немецкий и французский, 3 — французский и английский, 2 человека знают все три языка. Сколько человек работает в лаборатории? Сколько из них знает только французский язык? Сколько человек знает ровно 1 язык?
– сколько существует целых чисел от 1 до 1000, которые не делятся ни на 3, ни на 7?

Вариант 4

1. Назовите несколько элементов, принадлежащих множеству:
– чисел, обратных квадратам натуральных чисел;
– простых чисел, принадлежащих промежутку [-20; 3].

2. Найдите A ∩ B, AUB, A/B, если A = (–∞; 5), B = (–3; 8)

3. Решите задачи, используя формулу включений и исключений:
– группа ребят отправилась в поход. Семеро из них взяли с собой бутерброды, шестеро - фрукты, пятеро - печенье. Четверо ребят взяли с собой бутерброды и фрукты, трое — бутерброды и печенье, двое - фрукты и печенье, а один - и бутерброды, и фрукты, и печенье. Сколько ребят пошли в поход?
– сколько целых чисел от 0 до 999 не делятся ни на 2, ни на 7, ни на 13?

Вариант 5

1. Назовите несколько элементов, принадлежащих множеству:
– кубов натуральных чисел
– непростых чисел, принадлежащих промежутку [-5; 19].

2. Найдите A ∩ B, AUB, A/B, если A — множество простых чисел, B — множество положительных четных чисел

3. Решите задачи, используя формулу включений и исключений:
– староста класса, в котором 40 человек, подводил итоги по успеваемости группы за I полугодие. Получилась следующая картина: из 40 учащихся не имеют троек по русскому языку—25 человек, по математике — 28 человек, по русскому языку и математике — 16 человек, по физике — 31 человек, по физике и математике —22 человека, по физике и русскому языку 16 человек. Кроме того, 12 человек учатся без троек по всем трем предметам. Классный руководитель, просмотрев результаты, сказал: «В твоих расчетах есть ошибка». Составьте диаграмму Эйлера–Венна и объясните, почему это так;
– сколько целых чисел от 0 до 999 не делятся ни на 3, ни на 4, ни на 1?

Итог работы: решение задачи, защита

Практическая работа № 4
Приведение формул логики высказываний к виду ДНФ, КНФ

Цель: Научиться минимизировать логические функции разными методами.

Задание 1. Изучить теоретический материал и ответить на вопросы задания 2.

Алгоритм приведения формул логики высказываний к ДНФ (КНФ**)**

1.Избавиться от всех логических операций, содержащихся в формуле, заменив их основными: конъюнкцией, дизъюнкцией и отрицанием. Это можно сделать, используя равносильные формулы.

2. Заменить знак отрицания, относящийся к выражениям вида знаками отрицания, относящимся к отдельным переменным высказывания на основании законов Де Моргана.

3. Избавиться от знаков двойного отрицания.

4.Применить если нужно к операциям конъюнкции и дизъюнкции свойства дистрибутивности и формулы поглощения.

Совершенной дизъюнктивной нормальной формой (СДНФ) называется такая дизъюнктивная нормальная форма, у которой в каждую конъюнкцию входятвсе переменные данного списка (либо сами, либо их отрицания), причем в одном и т ом же порядке.

Свойства СДНФ:

1. ДНФ не содержит двух одинаковых конъюнкций (Из формулы удалены одинаковые элементарные конъюнкции, кроме одной, согласно правилу идемпотентности.

2. Ни одна конъюнкция не содержит одновременно двух одинаковых переменных.

3. Ни одна конъюнкция не содержит одновременно некоторую переменную и ее отрицание (Из формулы удалены элементарные конъюнкции, включающие одновременно переменную и ее отрицание, согласно закону инверсии).

4. Каждая конъюнкция СДНФ содержит либо переменную, либо ее отрицание для всех переменных, входящих в формулу (т.е. каждая элементарная конъюнкция включает все логические переменные, входящие в эту формулу).

Если в логической функции не выполняется последнее требование, то в неполную элементарную конъюнкцию необходимо ввести дополнительный множитель, включающий дизъюнкцию отсутствующей переменной и ее отрицание. Это всегда можно сделать, согласно закону инверсии.

Переход от ДНФ к СДНФ: если в какой-то простой конъюнкции недостает переменной, например, z, вставляем в нее выражение $z \vee \bar{z} = 1$,после чего раскрываем скобки (при этом повторяющиеся дизъюнктные слагаемые не пишем).

Совершенной конъюнктивной нормальной формой (СКНФ) называется такая КНФ, у которой в каждую простую дизъюнкцию входят все переменные данного списка (либо сами, либо их отрицания), причем в одинаковом порядке.

Свойства СКНФ:

1. КНФ не содержит двух одинаковых дизъюнкций.

2. Ни одна из дизъюнкций не содержит одновременно двух одинаковых переменных.

3. Ни одна из дизъюнкций не содержит одновременно некоторую переменную и ее отрицание.
4. Каждая дизъюнкция СКНФ содержит либо переменную, либо ее отрицание для всех переменных, входящих в формулу.
Если логическая функция имеет вид КНФ, то привести ее к виду совершенной КНФ (сокращенно СКНФ) можно, дополнив каждую элементарную дизъюнкцию логическим нулем, который в следующем шаге заменяется на конъюнкцию недостающей переменной и ее отрицание. Полученная нормальная конъюнктивная форма является совершенной.
Переход от КНФ к СКНФ: если в простой дизъюнкции не хватает какой-то переменной (например, z, то добавляем в нее выражение $z \cdot \bar{z} = 0$ (это не меняет самой дизъюнкции), после чего раскрываем скобки с использованием распределительного закона)

Минимизация логических функций по картам Карно.

Карты Карно - это графическое представление операций попарного неполного склеивания и элементарного поглощения.
Карты Карно рассматриваются как перестроенная соответствующим образом таблица истинности функции.
Карты Карно - определенная плоская развертка n-мерного булева куба.
Строится таблица истинности функции определенным образом. Каждая клетка таблицы соответствует вполне определенной вершине булева куба. Нулевые значения не записываются.
Карта Карно для функции 4-х переменных:

x_1x_2 \ x_3x_4	00	01	11	10
00	1	1	1	
01			1	
11		1		
10	1	1		

Благодаря использованию кода Грея в ней верхняя строка является соседней с нижней, а правый столбец соседний с левым, т.е. карта Карно рассматривается как поверхность фигуры под названием тор ("бублик").
р-клетки - клетки карты Карно, соответствующие единичному значению функции.
Соседние наборы - наборы, которые различаются только одним аргументом (одной орбитой).
Правила склейки:
– склейку клеток карты Карно можно осуществлять по единицам (если необходимо получить ДНФ) или по нулям (если требуется КНФ);

– склеивать можно только прямоугольные области с числом единиц (нулей) 2^n, где n — целое число. Для карт Карно с числом переменных более четырёх могут получаться более сложные области, о чём будет сказано в следующих разделах;

– область, которая подвергается склейке должна содержать только единицы (нули);

– крайние клетки каждой горизонтали и каждой вертикали также граничат между собой и могут объединяться в прямоугольники. Следствием этого правила является смежность всех четырёх угловых ячеек карты Карно для N=4. Если во всех четырёх угловых ячейках стоят единицы (нули) они могут быть объединены в квадрат;

– все единицы (нули) должны попасть в какую-либо область;

– с точки зрения минимальности ДНФ (КНФ) число областей должно быть как можно меньше (каждая область представляет собой терм), а число клеток в области должно быть как можно больше (чем больше клеток в области, тем меньше переменных содержит терм. Терм размером 2^n ячеек содержит $N–n$ переменных);

– одна ячейка карты Карно может входить сразу в несколько областей. Это следует из очевидного свойства булевых функций: повторение уже существующего слагаемого (сомножителя) не влияет на функцию: $A \vee A = A; A \cdot A = A$.;

– в отличие от СДНФ (СКНФ), ДНФ (КНФ) не единственны. Возможно несколько эквивалентных друг другу ДНФ (КНФ), которые соответствуют разным способам покрытия карты Карно прямоугольными областями.

После заполнения Карты Карно значениями из таблицы истинности берём первую область и смотрим, какие переменные не меняются в пределах этой области, выписываем конъюнкцию этих переменных; если неменяющаяся переменная нулевая, проставляем над ней инверсию. Берём следующую область, выполняем то же самое, что и для первой, и т. д. для всех областей. Конъюнкции областей объединяем дизъюнкцией.

Для КНФ всё то же самое, только рассматриваем клетки с нулями, неменяющиеся переменные в пределах одной области объединяем в дизъюнкции (инверсии проставляем над единичными переменными), а дизъюнкции областей объединяем в конъюнкцию. На этом минимизация считается законченной.

Задание2. Ответить на вопросы

1. Что называют простой конъюнкцией и простой дизъюнкцией?
2. Что такое ДНФ и КНФ?
3. В чем отличие СДНФ/СКНФ от ДНФ/КНФ?
4. Для чего нужно минимизировать логические функции?
5. Какие алгебраические преобразования наиболее часто используются при минимизации функции?
6. В чем суть метода карт Карно?

Итог работы: решение задачи, защита

Практическая работа № 5
Приведение формул логики высказываний к виду СДНФ, СКНФ

Цель: Научиться минимизировать логические функции разными методами.

Задание 1. Рассмотреть пример решения задачи.

У мальчика Коли есть мама, папа, дедушка и бабушка. Коля пойдёт гулять на улицу, если и только если ему разрешат хотя бы двое родственников. Для краткости обозначим родственников Коли через буквы:
мама — x1
папа — x2
дедушка — x3
бабушка — x4
Условимся обозначать согласие родственников единицей, несогласие - нулём. Возможность пойти погулять обозначим буквой f, Коля идёт гулять — f = 1, Коля гулять не идёт — f = 0.
Составим таблицу истинности:

№	X1	X2	X3	X4	f
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0
2	0	0	1	0	0
3	0	0	1	1	1
4	0	1	0	0	0
5	0	1	0	1	1
6	0	1	1	0	1
7	0	1	1	1	1
8	1	0	0	0	0
9	1	0	0	1	1
10	1	0	1	0	1
11	1	0	1	1	1
12	1	1	0	0	1
13	1	1	0	1	1
14	1	1	1	0	1
15	1	1	1	1	1

Перерисуем таблицу истинности в 2-х мерный вид, переставим в ней строки и столбцы в соответствии с кодом Грея и заполним её значениями из таблицы истинности:

X1 X2 \ X3 X4	00	01	11	10
00	0	0	1	0
01	0	1	1	1
11	1	1	1	1
10	0	1	1	1

Минимизируем в соответствии с **правилами склейки**:

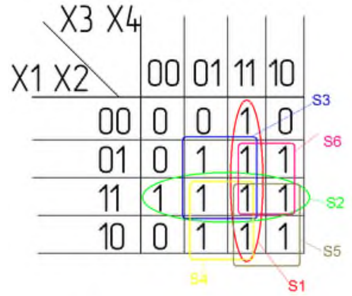
– все области содержат 2^n клеток;

– так как Карта Карно на четыре переменные, оси располагаются на границах Карты и их не видно;

– так как Карта Карно на четыре переменные, все области симметрично осей — смежные между собой;

– области S3, S4, S5, S6 максимально большие;

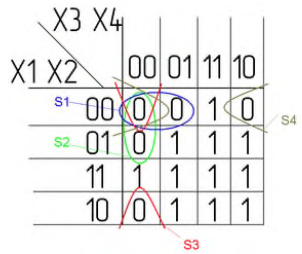
– все области пересекаются (необязательное условие).



В данном случае рациональный вариант только один.

$$f(X1, X2, X3, X4) = S1 \vee S2 \vee S3 \vee S4 \vee S5 \vee S6 =$$
$$= X3X4 \ \vee \ X1X2 \ \vee \ X2X4 \ \vee \ X1X4 \ \vee \ X1X3 \ \vee \ X2X3$$

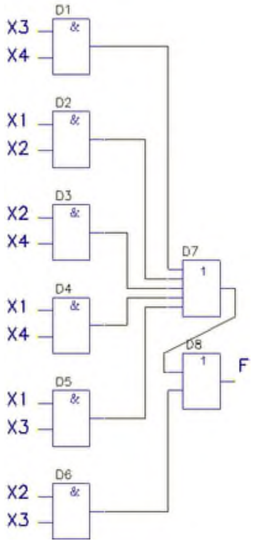
Составим мин. КНФ:

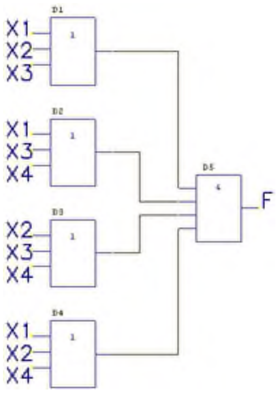


$$f(X1, X2, X3, X4) = (S1)\ (S2)\ (S3)\ (S4) =$$
$$= (X1 \vee X2 \vee X3)(X1 \vee X3 \vee X4)(X2 \vee X3 \vee X4)(X1 \vee X2 \vee X4)$$

Теперь по полученной минимальной ДНФ и КНФ можно построить логическую схему:

мДНФ мКНФ





Итог работы: решение задачи, защита

Практическая работа № 6

Приведение формул логики высказываний к виду ДНФ, КНФ, СДНФ, СКНФ

Цель: Научиться минимизировать логические функции разными методами.

Задание 1. Для функции из таблицы 1, соответствующей номеру своего варианта, выполнить следующее:

– составить таблицу истинности;
– записать СДНФ и СКНФ функции;
– доказать эквивалентность СДНФ и СКНФ.

Таблица 1 - Варианты задания

№ варианта	Функция
1	$f(x,y,z)=\bar{x}\ \&\ y\vee\left(\overline{x\vee z}\right)$
2	$f(x,y,z)=z\rightarrow\left(\bar{x}\vee\bar{y}\right)$
3	$f(x,y,z,)=x\ \&\ y\rightarrow\left(\overline{x\vee\bar{y}}\right)$
4	$f(x,y,z)=\left(x\ \&\ y\ \&\ \bar{z}\right)\sim\left(\bar{x}\vee y\right)$
5	$f(x,y,z)=\left(\bar{x}\vee\bar{y}\right)\sim y$

Задание 2. Для функции из таблицы 2, соответствующей номеру своего варианта, выполнить следующее:

– Составить таблицу истинности.
– Записать СДНФ и СКНФ функции.
– Упростить выражение для СДНФ и СКНФ, используя карту Карно.
– Составить схему устройства, реализующего заданную СДНФ и СДНФ после упрощения.

Таблица 2 - Варианты задания

№	Состояние входа				Функция f по вариантам				
	X1	X2	X3	X4	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1	0	1	0	0
2	0	0	1	0	0	0	0	0	0
3	0	0	1	1	0	0	1	0	1
4	0	1	0	0	0	1	0	0	0
5	0	1	0	1	0	1	0	1	0
6	0	1	1	0	0	0	1	0	0
7	0	1	1	1	0	0	1	1	1
8	1	0	0	0	1	0	0	0	1
9	1	0	0	1	1	0	1	0	1
10	1	0	1	0	0	0	0	0	0
11	1	0	1	1	0	0	1	0	1
12	1	1	0	0	0	1	0	1	0
13	1	1	0	1	1	1	0	1	0
14	1	1	1	0	1	0	0	1	0
15	1	1	1	1	0	0	0	1	0

Итог работы: решение задачи, защита

Практическая работа № 7
Определение математических основ теории алгоритмов

Цель: Рассмотреть применение комбинаторной логики при решении задач.

Задание 1. Рассмотреть и проанализировать решение следующей задачи:
Задача № 1. Организаторы городской математической олимпиады для учащихся 9-11 классов решили ввести оригинальное определение числа участников и номера кодировок их выполненных работ. Чтобы узнать, какое количество участников необходимо пригласить на конкурс, нужно вычислить все возможные варианты трёхзначных чисел, которые можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5 так, чтобы каждая цифра в числе использовалась единожды.

Решение.

Шаг 1. Вычленение основного множества.

А - множество всевозможных трёхзначных чисел, которые можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5 так, чтобы каждая цифра в числе использовалась единожды.

Шаг 2. Вычленение из основного множества нескольких элементов.

Выберем, например, три цифры - 1, 3, 4.

Шаг 3. Сравнение множеств вычлененных элементов с различными вариантами перестановок: {1, 3, 4}; {1, 4, 3} или {4, 3, 1} и т.д.

Шаг 4. Осуществление необходимого вывода о важности (последовательность) или неважности (подмножество) перестановок в образованных множествах вычлененных элементов.

В данной задаче перестановка цифр задает различные числа, следовательно, важен порядок расположения элементов, т.е. каждой цифре присваивается свой личный номер, значит, выборочные элементы задают последовательности.

Шаг 5. Осуществление окончательного вывода: Порядок важен - последовательность вычлененных элементов - понятие "размещение". При решении этой задачи используем формулу размещений.

$$A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$$

Ответ: 60 участников.

Задание 2. Решить следующие задачи:
Задача № 2. Сколькими способами можно разместить во время проведения итоговой аттестации по алгебре 15 учащихся девятого класса за пятнадцатью столами так, чтобы за каждым столом сидело по одному ученику.

Задача № 3. Школьному координатору по проведению итоговой аттестации учащихся 11 классов необходимо разместить в период с 1 по 10 июня три экзамена из семи, которые были определены выбором учащихся.

Задача № 4. Каждый ученик физико-математического класса посещает элективный курс или по математике, или по физике, или оба курса. Элективный курс по математике посещают 18 учащихся, а по физике - 19 учащихся, причем 14 человек посещают оба курса. Сколько учащихся в физико-математическом классе?

Задача № 5 (НГУ-1996 г.) *Сочетание методов: анализ, синтез, перебор, аналогия.*

Папа Карло выстрогал Буратино и отправил его в школу, дав ему на букварь несколько рублей, не более 30 штук. Буратино продал все рубли коллекционерам по 150 сольдо за каждый. Пять сольдо он сунул себе за щеку, не более трех закопал на поле Чудес, а на оставшиеся купил хлеба по цене 51 сольдо за корочку. Сколько корочек хлеба купил Буратино?

Задача № 6. Однажды гномы, решившие отправиться за сокровищами, собрались на совет, чтобы обсудить возможные опасности, которые их ожидают. Было высказано три предложения:
1. Их либо захватят гоблины, либо нападёт дракон, либо они заблудятся в лесу, либо их ожидают какие – то две, а может быть, и все три из этих опасностей.
2. Если дракон не нападёт, то они утонут в реке.
3. И дракон нападёт, и заблудятся в лесу.

Помогавший им волшебник успокоил их и сказал, что второе и третье предположения ложны. Каких же опасностей следует ожидать гномам?

Задача № 7. Один король как – то подвергся нападению вражеской армии и был осаждён в крепости, в которой были северные и южные ворота. Чтобы выдержать штурм, ему необходимо было точно знать, на какие из этих ворот готовится атака.

Рано утром перед началом штурма к нему привели пленника, захваченного у противника. Об этом пленнике было известно, что он либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжёт, и, кроме того, на все вопросы он отвечает только «да» или «нет».

Король быстро понял, что задавать простые вопросы бесполезно. Если бы он спросил: «Назначен ли штурм на северные ворота?» - и получил бы ответ «да», то из этого ответа нельзя было бы сделать правильного вывода. Если бы штурм действительно был назначен на северные ворота, то рыцарь ответил бы «да», а лжец «нет». А если бы на южные, то рыцарь сказал бы «нет», а лжец – «да». Поскольку король не знал, кто перед ним (рыцарь или лжец), то ответ «да» не позволял бы понять, верно ли, что штурм назначен на северные ворота.

Король впал в отчаяние, но присутствующий при допросе логик задал вопрос, с помощью которого удалось установить, на какие ворота готовится штурм. Какой это вопрос?

Задача № 8. Менеджер банка должен установить 4 банкомата. В течение каждого дня работы должны выполняться следующие условия:

1. Если работает первый банкомат, то третий банкомат не должен работать, а второй и четвёртый должны.
2. Если работает третий банкомат, то первый и четвёртый не должны работать, а вто-рой должен.
3. Должен работать по крайней мере один банкомат.

Необходимо определить наибольшее число дней, которое могут работать банкоматы при выполнении этих условий, так, чтобы их назначение ни в один из дней не повторялось, а также указать допустимое расписание на каждый день.

Задача № 9. Имеется множество из 8 различных букв {A, B, C, D, E, F, G, H}. Один из играющих задумывает любую букву из этого множества. Другой играющий должен угадать эту букву. Он имеет возможность задать три вопроса, ответы на которые должны быть «да» или «нет». Вопросы должны быть заданы независимо один от другого, т. е. второй играющий узнает от-веты только после того, как он задал все три вопроса. Какие вопросы необходимо задать?

Задача № 10. Трое друзей, болельщиков автогонок «Формула - 1», спорили о результатах пред-стоящего этапа гонок.

- Вот увидишь, Шумахер не придёт первым, - сказал Джон. - Первым будет Хилл.
- Да нет же, победителем будет, как всегда Шумахер,- воскликнул Ник. - А об Алези и говорить нечего, ему не быть первым.

Питер, к которому обратился Ник, возмутился:

- Хиллу не видать первого места, а вот Алези пилотирует самую мощную машину.

По завершении этапа гонок оказалось, что каждое из двух предположений двоих дру-зей подтвердилось, а оба предположения третьего оказались неверными. Кто выиграл этап гонки?

Задача № 11. По обвинению в ограблении перед судом предстали Иванов, Петров, Сидоров. Следствием установлено следующее:
1. Если Иванов невиновен или Петров виновен, то Сидоров виновен.
2. Если Иванов невиновен, то Сидоров невиновен.
Виновен ли Иванов?

Задача № 12 На вопрос, кто из трёх школьников изучал логику, был получен правильный ответ: если изучал первый, то изучал и второй, но неверно, что если изучал третий, то изучал и вто-рой. Кто из учащихся изучал логику?

Задача № 13. Алёша, Боря и Гриша нашли в земле старинный сосуд. Рассматривая удивительную находку, каждый высказал по два предположения:
Алёша: «Это сосуд греческий и изготовлен в V веке».
Боря: «Это сосуд финикийский и изготовлен в III веке».
Гриша: «Это сосуд не греческий и изготовлен в IV веке».
Учитель истории сказал ребятам, что каждый из них прав только в одном из двух предположений.
Где и в каком веке изготовлен сосуд?

Задача № 14. Брауну, Джонсу и Смиту предъявлено обвинение в соучастии в ограблении банка. Похитители скрылись на поджидавшем их автомобиле. На следствии Браун показал, что преступники скрылись на синем «Бьюике», Джонс сказал, что это был чёрный «Крайслер», а Смит утверждает, что это был «Форд Мустанг», и ни в коем случае не синий. Стало извест-но, что желая запутать следствие, каждый из них указал правильно либо только марку маши-ны, либо только её цвет. Какого цвета и какой марки был автомобиль?

Итог работы: решения задач, защита

Практическая работа № 8
Применение логики предикатов к анализу рассуждений.

Цель работы: приобретение навыков перевода высказываний естественного языка на язык исчисления предикатов.

Задание 1. Изучить теоретический материал и ответить на вопросы:
– Когда конъюнкция двух предикатов тождественно истинна?
– Когда предикат $A(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, заданный на множествах $M_1, M_2,\ldots,M_n$ называется выполнимым?
– Когда предикат $A(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, заданный на множествах $M_1, M_2,\ldots,M_n$ называется тождественно истинным?

***N*-местным предикатом**, определённым на множествах $M_1, M_2,\ldots,M_n$, называется предложение, содержащее n переменных $x_1,x_2,\ldots,x_n$ превращающееся в высказывание при подстановке вместо этих переменных любых конкретных элементов из множеств $M_1, M_2,\ldots,M_n$ соответственно.

Обозначать n-местные предикаты будем $A\ (x_1,x_2,\dots,x_n)$, причём переменные $x_1,x_2,\dots,x_n$ называются **предметными**.

Всякий n-местный предикат $A\ (x_1,x_2,\dots,x_n)$, определённый на множествах $M_1, M_2,\dots,M_n$ есть функция от n аргументов, заданная на указанных множествах и принимающая значение 0 (ложно) или 1(истинно).

N-местный предикат $A\ (x_1,x_2,\dots,x_n)$ задан на множестве M, если $x_1,x_2,\dots,x_n$ принимают значения из M**.**

Примерами предикатов являются любые уравнения и неравенства из школьного курса математики.

Пример 1. $x+y>2$, где x,у из R есть двухместный предикат заданный на множестве всех действительных чисел R.

Предикат $A\ (x_1,x_2,\dots,x_n)$, заданный на множествах $M_1, M_2,\dots,M_n$ называется:

– **тождественно истинным**, если при любой подстановке вместо переменных $x_1,x_2,\dots,x_n$ любых конкретных значений из множеств $M_1, M_2,\dots,M_n$ он превращается в истинное высказывание;

– **тождественно ложным**, если при любой подстановке вместо переменных $x_1,x_2,\dots,x_n$ любых конкретных значений из множеств $M_1, M_2,\dots,M_n$ соответственно он превращается в ложное высказывание;

– **выполнимым**, если существует по крайней мере один набор значений переменных из $M_1, M_2,\dots,M_n$, при которых его значение истинно.

Обозначают: тождественно истинный – $A\ (x_1,x_2,\dots,x_n) \equiv 1$; тождественно ложный – $A\ (x_1,x_2,\dots,x_n) \equiv 0$.

Двухместный предикат $x^2+y^2 \geq 0$, заданный на множестве R является тождественно истинным.

Одноместный предикат $\sin x > 1$, заданный на множестве R является тождественно ложным.

Примером выполнимого предиката заданного на множестве R является предикат $x+y > z$.

Множеством истинности предиката $A\ (x_1,x_2,\dots,x_n)$ заданного на множествах $M_1, M_2,\dots,M_n$ называется совокупность всех упорядоченных наборов $(a_1,a_2,\dots,a_n)$, где $a_i \in M_i$, $i=1,2,\dots,n$ при которых $A(a_1,a_2,\dots,a_n) =1$.

Множество истинности предиката $A\ (x_1,x_2,\dots,x_n)$ будем обозначать N_A.

Пример 1. Пусть $A(x)=(x^2+3x - 4=0)$ – одноместный предикат, заданный на множестве R. Ясно, что $N_A=\{1,-4\}$. Однако, если данный предикат задан на множестве натуральных чисел, то его множество истинности $N'_A=\{1\}$.

Пример 2. Пусть $x^2+y^2=4$ – двухместный предикат, заданный на множестве действительных чисел R. Тогда множеством истинности его являются множества всех таких пар действительных чисел, которые являются координатами точек плоскости, лежащих на окружности с центром в начале координат и радиусом 2.

Непосредственно из определения 2 следует справедливость следующего утверждения.

Пусть $A\ (x_1,x_2,\dots,x_n)$ n-местный предикат, заданный на множествах $M_1, M_2,\dots,M_n$ тогда справедливы следующие утверждения :

– A (x1,x2,…,xn) является тождественно истинным тогда и только тогда, когда NA= M1× M2×…×Mn;

– A (x1,x2,…,xn) является тождественно ложным тогда и только тогда, когда NA=Ø;

– A (x1,x2,…,xn) является выполнимым тогда и только тогда, когда NA≠Ø.

Два n-местных предиката $A(x_1,x_2,...,x_n)$ и $B(x_1,x_2,...,x_n)$ заданных на одних и тех же множествах $M_1, M_2,...,M_n$ называются **равносильными**, если для любых наборов переменных $(a_1,a_2,...,a_n)$, где $a_i \in M_i$, $i=1,2,...,n$ они принимают одинаковые логические значения.

Непосредственно из данного определения следует, что предикаты $A(x_1,x_2,...,x_n)$ и $B(x_1,x_2,...,x_n)$ равносильны тогда и только тогда, когда их множества истинности совпадают, то есть $N_A=N_B$.

Тот факт, что предикаты $A(x_1,x_2,...,x_n)$ и $B(x_1,x_2,...,x_n)$ равносильны будем обозначать так: $A=B$.

Предикат $A(x_1,x_2,...,x_n)$ определённый на множествах $M_1, M_2,...,M_n$ называется **следствием** предиката $B(x_1,x_2,…,x_n)$ определённом над теми же множествами, если он принимает истинные значения на всех тех наборах значений переменных, на которых истинно значение предиката $A(x_1,x_2,...,x_n)$.

Другими словами можно сказать, что предикат $A(x_1,x_2,...,x_n)$ является следствием предиката $B(x_1,x_2,...,x_n)$ тогда и только тогда, когда $N_B \subseteq N_A$.

Пример 3. Пусть $A_1(x)=x\vdots 2$ (x делится на 2), $A_2(x)= x\vdots 4$ (x делится на 4) два одноместных предиката заданных на множестве натуральных чисел. Ясно, что предикат A_1 является следствием предиката A_2.

Так как любой предикат при фиксированных значениях переменных превращается в высказывание, то над ними можно проделывать те же логические операции, что и над высказываниями.

Отрицанием n-местного предиката $A(x_1,x_2,...,x_n)$, определённого на множествах $M_1, M_2,...,M_n$ называется n-местный предикат, определённый на тех же множествах, обозначаемый $\overline{A(x_1,x_2,\dots,x_n)}$, значение которого истинно при всех тех значениях переменных, при которых значение предиката ложно.

Пример 4. Отрицанием двухместного предиката $x+y > 2$, определённого на множестве R является предикат $x+y < 2$, определённый на том же множестве R.

Теорема 1 *Пусть* $A(x_1,x_2,\dots,x_n)$ – n-местный предикат, определённый на множествах $M_1, M_2,…,M_n$. Тогда справедливо следующее тождество: $N_{\bar{A}} = (M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n) \setminus N_A$.

Непосредственно из данной теоремы следует:

Следствие. Отрицание предиката будет тождественно истинным тогда и только тогда, когда исходный предикат тождественно ложен.

Конъюнкцией n-местных предикатов $A(x_1,x_2,\dots,x_n)$ и $B(x_1,x_2,\dots,x_n)$, определённых на множествах $M_1,M_2,\dots,M_n$ называется n-местный предикат, определённый на тех же множествах, обозначаемый $A(x_1,x_2,\dots,x_n)\cdot B(x_1,x_2,\dots,x_n)$, значение которого истинно при тех и только тех наборах переменных, при которых истинно значение исходных предикатов.

Теорема 2 Пусть $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $B(x_1, x_2, \dots, x_n)$ два n-местных предиката определённые на множествах $M_1, M_2, \dots, M_n$. Тогда справедливо следующее тождество: $N_{A \cdot B} = N_A \cap N_B$.

Непосредственно из данной теоремы следует:

Следствие. Конъюнкция двух предикатов тождественно истинна тогда и только тогда, когда оба данных предиката тождественно истинны.

Теорема 2 используется в школьном курсе математики при решении систем уравнений и неравенств. Например, требуется решить систему неравенств $|x| < 5$, $x \geq 3$. Для этого нужно найти множество истинности предиката $(|x| < 5) \cdot (x \geq 3)$, определённого на множестве R. Используя теорему 2, получаем:

$N_{(|X|<5)\cdot(X \geq 3)} = N_{|X|<5} \cap N_{X \geq 3} = [-5{,}5] \cap [3, +\infty) = [3{,}5]$.

Дизъюнкцией n-местных предикатов $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $B(x_1, x_2, \dots, x_n)$, определенных на множествах $M_1, M_2, \dots, M_n$ называется n-местный предикат, определенный на этих множествах, обозначенный $A(x_1, x_2, \dots, x_n) \vee B(x_1, x_2, \dots, x_n)$, значение которого истинно при тех и только тех наборах переменных, при которых истинно значение по меньшей мере одного из исходных предикатов.

Теорема 3 Пусть $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $B(x_1, x_2, \dots, x_n)$ два n-местных предиката, определенные на множествах $M_1, M_2, \dots, M_n$. Тогда справедливо следующее тождество $N_{A \vee B} = N_A \cup N_B$.

Следствие. Дизъюнкция двух предикатов тождественно ложна тогда и только тогда, когда оба данных предиката тождественно ложны.

Теорема 4 Пусть $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $B(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $C(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – n-местные предикаты, определенные на множествах $M_1, M_2, \dots, M_n$, тогда справедливы следующие равносильности:

$A \cdot B = B \cdot A$, $A \vee B = B \vee A$, $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$, $A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$, $A \cdot (B \vee C) = A \cdot B \vee A \cdot C$, $A \vee B \cdot C = (A \vee B) \cdot (A \vee C)$, $\overline{A \cdot B} = \overline{A} \vee \overline{B}$, $\overline{A \vee B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$.

Пусть $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $B(x_1, x_2, \dots, x_n)$ n-местные предикаты на множествах $M_1, M_2, \dots, M_n$. Их импликацией называется предикат, определенный на тех же множествах, обозначаемый $A(x_1, x_2, \dots, x_n) \Rightarrow B(x_1, x_2, \dots, x_n)$, значение которого ложно только при тех наборах переменных, при которых значение предиката A истинно, а B – ложно. Предикат A называется посылкой и B – заключением.

Непосредственно из определения следует, что импликация двух предикатов, зависящих от одних и тех же переменных, есть тождественно истинный предикат тогда и только тогда, когда ее заключение является следствием посылки.

Эквивалентность двух n-местных предикатов $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $B(x_1, x_2, \dots, x_n)$, определенных на множествах $M_1, M_2, \dots, M_n$, называется n-местный предикат, определенный на тех же множествах, обозначаемый $A(x_1, x_2, \dots, x_n) \Leftrightarrow B(x_1, x_2, \dots, x_n)$, значение которого истинно при всех тех наборах переменных, при которых предикаты A и B принимают одинаковые логические значения.

Непосредственно из определения 10 следует, что эквивалентность двух предикатов, зависящих от одних и тех же переменных, есть тождественно истинный предикат тогда и только тогда, когда они равносильны.

В следующей теореме доказаны важные равносильности, выражающие одни логические операции над предикатами через другие.

Теорема 5 Пусть $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $B(x_1, x_2, \dots, x_n)$ n-местные предикаты, определенные на множествах $M_1, M_2, \dots, M_n$. Тогда справедливы следующие равносильности:

$A => B = \overline{A} V B$, $A \cdot B = \overline{\overline{A} V \overline{B}}$, $A <=> B = (A => B) \cdot (B => A)$.

Задание 2. Выполнить задания своего варианта**:**

Вариант 1

1. Перевести выражения естественного языка на язык исчисления предикатов:

– если произведение конечного числа сомножителей равно нулю, то, по меньшей мере, один из сомножителей равен нулю. ($P(x)$ – “x есть произведение конечного числа сомножителей», $F(x,y)$ – «x есть один из сомножителей числа y”);

– существует x, меньшее, чем 5 и, большее, чем 3;

– каждый студент выполнил, по крайней мере, одну лабораторную работу;

– животные, живущие в зоопарке, встречаются с людьми, посещающими зоопарк;

– судья Иванов не стар и не бодр;

– некоторые женщины одновременно являются юристами и членами конгресса;

– ни один судья не является преподавателем;

– некоторые преподаватели не восхищаются ни одним юристом;

– все студенты группы свободно владеют всеми тремя языками: английским, немецким, французским;

– каждое рациональное число есть действительное число. Некоторое действительное число есть рациональное число. Не каждое действительное число есть рациональное число.

2. Введем следующие обозначения:

$Z(x,t)$ - “я вижу предмет x в момент времени t”;

$P(x,t)$ - “я беру предмет x в момент времени t”;

$t' < t$ - “ момент времени t' предшествует моменту t”.

Перевести следующие выражения на язык исчисления предикатов:

– я всегда что-то вижу;

– не существует предметов, которые я никогда не беру;

– я всегда вижу либо все, либо ничего.

Вариант 2

1. Перевести выражения естественного языка на язык исчисления предикатов:

– наибольший общий делитель чисел a и b делится на всякий их общий делитель ($F(x,y)$ – “x есть один из делителей числа y”, а $G(x,y,z)$ – “z есть наибольший общий делитель чисел x и y”);

– для любого числа x существует число y, меньшее x;

– если произведение натуральных чисел делится на простое число, то на него делится, по крайней мере, один из сомножителей;
– никакой продавец игрушками сам себе их не покупает;
– не все юристы судьи;
– некоторые пациенты любят докторов;
– некоторые женщины-юристы являются домашними хозяйками;
– судья Иванов не восхищается ни одним преподавателем;
– каждый студент группы владеет каждым иностранным языком (английским, немецким, французским);
– любые два действительных числа либо равны, либо одно из них меньше другого.

2. Введем следующие обозначения:
$Z(x,t)$ - “я вижу предмет x в момент времени t”;
$P(x,t)$ - “я беру предмет x в момент времени t”;
$t' < t$ - “ момент времени t' предшествует моменту t”.
Перевести следующие выражения на язык исчисления предикатов:
– иногда я ничего не вижу;
– я никогда не беру того, что я всегда вижу;
– если я беру некоторый предмет, который до этого уже видел, то я ранее видел предмет, который взял позднее.

Вариант 3

1. Перевести выражения естественного языка на язык исчисления предикатов:
– для всякого действительного числа x существует большее действительное число y;
– для любых чисел x и y суммы $x+y$ и $y+x$ равны;
– через три точки, не лежащие на одной прямой, проходит единственная плоскость;
– те римляне, которые ненавидели диктатора, пытались убить его;
– некоторые юристы, являющиеся политиками, – члены конгресса;
– ни один доктор не является знахарем;
– все женщины-юристы восхищаются каким-нибудь судьей;
– существуют как юристы, так и преподаватели, которые восхищаются судьей Ивановым;
– есть студенты, которые свободно владеют и английским и немецким и французским языками;
– каждый ребенок человека x состоит в браке с ребенком человека y.

2. Введем следующие обозначения:
$Z(x,t)$ - “я вижу предмет x в момент времени t”;
$P(x,t)$ - “я беру предмет x в момент времени t”;
$t' < t$ - “ момент времени t' предшествует моменту t”.
Перевести следующие выражения на язык исчисления предикатов:
– существуют предметы, которые я никогда не вижу;

– всегда существуют вещи, которые я не вижу и не беру;
– некоторые вещи, которые я видел ранее, я всегда вижу вновь спустя определенное время.

Вариант 4

1. Перевести выражения естественного языка на язык исчисления предикатов:
– существуют такие действительные числа x, y, z что сумма чисел x и y

больше, чем произведение чисел x и z;
– для любого числа x существует такое число y, что для любого z, если разность
$z-5$ меньше, чем y, то разность $x-7$ меньше 3;
– всякое животное, встречающееся с вежливыми людьми, счастливо;
– римляне либо были преданы диктатору, либо ненавидели его;
– ни один член конгресса не бодр;
– выгул кошек или собак запрещен;
– некоторые юристы восхищаются только судьями;
– только судьи восхищаются судьями;
– в группе есть студенты, которые свободно владеют английским языком, есть те, которые свободно владеют французским, а также те, которые знают немецкий язык;
– у человека y существует ребенок, который не состоит в браке с ребенком человека x.

2. Введем следующие обозначения:
$Z(x,t)$ - “я вижу предмет x в момент времени t”;
$P(x,t)$ - “я беру предмет x в момент времени t”;
$t' < t$ - “ момент времени t' предшествует моменту t”.
Перевести следующие выражения на язык исчисления предикатов:
– я вижу каждую вещь в некоторый момент времени;
– я беру всякую вещь, которую я никогда не вижу;
– если я когда-либо видел две вещи одновременно, то в будущем я также увижу их только одновременно.

Вариант 5

1. Перевести выражения естественного языка на язык исчисления предикатов:
– для каждого действительного числа x существует такое y, что для каждого z, если сумма z и 1 меньше y, то сумма x и 2 меньше 4;
– между любыми двумя различными точками на прямой лежит, по крайней мере, одна точка, с ними не совпадающая;
– все люди, посещающие зоопарк, вежливы;
– некоторые судьи - старики, но бодрые;
– все старые члены конгресса - юристы;
– ни одна женщина не является одновременно политиком и домашней хозяйкой;
– некоторые юристы восхищаются женщинами;

– все судьи восхищаются только судьями;
– нет столь великой вещи, которую не превзошла бы величиной еще большая;
– существуют два человека такие, что каждый ребенок одного из них состоит в браке с ребенком другого.

2. Введем следующие обозначения:
$Z(x,t)$ - “я вижу предмет x в момент времени t”;
$P(x,t)$ - “я беру предмет x в момент времени t”;
$t^{'} < t$ - “ момент времени $t^{'}$ предшествует моменту t”.
Перевести следующие выражения на язык исчисления предикатов:
– если я беру предмет, не видя его до этого, то через некоторое время я вижу его, но не беру;
– я беру всякий предмет, который я еще не взял до этого;
– если я когда-либо видел и взял предмет одновременно, то впоследствии я либо делаю то и другое, либо не делаю ни того, ни другого.

Итог работы: решения задач, защита

Практическая работа № 9
Анализ модели данной сигнатуры. Вычисление значений формулы логики предикатов в данной модели.

Цель: усвоение возможностей логики высказываний, позволяющее строить высказывания с учетом свойств изучаемых объектов или отношений между ними.

Задание 1. Рассмотреть и проанализировать решение задач1- 3.
Таблица. Основные равносильности логики высказываний.

№	Формула	Название
1	$X \vee \overline{X} \equiv И$	Закон исключенного третьего
2	$X \& \overline{X} \equiv Л$	Закон противоречия
3	$X \& Y \equiv Y \& X, X \vee Y \equiv Y \vee X$	Законы коммутативности
4	$(X \& Y) \& Z \equiv X \& (Y \& Z)$ $(X \vee Y) \vee Z \equiv X \vee (Y \vee Z)$	Законы ассоциативности
5	$X \& (Y \vee Z) \equiv (X \& Y) \vee (X \& Z)$ $X \vee (Y \& Z) \equiv (X \vee Y) \& (X \vee Z)$	Законы дистрибутивности
6	$\neg\neg X \equiv X$	Закон двойного отрицания
7	$X \& X \equiv X, X \vee X \equiv X$	Закон идемпотентности

8	$(\overline{X \vee Y}) \equiv \overline{X} \& \overline{Y}$; $(\overline{X \& Y}) \equiv \overline{X} \vee \overline{Y}$	Законы де Моргана
9	$X \vee (X \& Y) \equiv X, X \& (X \vee Y) \equiv X$	Законы поглощения
10	$(X \& Y) \vee (X \& \overline{Y}) \equiv X$ $(X \vee Y) \& (X \vee \overline{Y}) \equiv X$	Законы склеивания
11	$X \to Y \equiv \overline{X} \vee Y$	Замена импликации
12	$X \leftrightarrow Y \equiv (X \& Y) \vee (\overline{X} \& \overline{Y})$	Замена эквиваленции

Таблица. Основные равносильности логики предикатов

№	Формула
1	$\neg(\exists x P(x)) \equiv \forall x(\neg P(x))$
2	$\neg(\forall x P(x)) \equiv \exists x(\neg P(x))$
3	$(\forall x P(x)) \& (\forall x Q(x)) \equiv \forall x(P(x) \& Q(x))$
4	$(\exists x P(x)) \vee (\exists x Q(x)) \equiv \exists x(P(x) \vee Q(x))$
5	$(\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x)) \equiv \forall x \forall y(P(x) \vee Q(y))$
6	$(\exists x P(x)) \& (\exists x Q(x)) \equiv \exists x \exists y(P(x) \& Q(y))$

Задача №1 Даны утверждения:
A(n)= {число n делится на 3};
B(n)= {число n делится на 2};
C(n)= {число n делится на 4};
D(n)= {число n делится на 6};
E(n)={число n делится на 12}.
Будет ли истинна формула логики предикатов $\forall n(A(n) \& B(n) \to E(n))$?
Решение:
а) Рассмотрим подформулы формулы логики предикатов:

1. $A(n) \& B(n)$ ={число n делится на 6};
2. $A(n) \& B(n) \to E(n)$ ={если число n делится на 6, то оно делится на 12}.

Вторая формула истинна не для всех значений n , например, для n =6 формула $A(n) \& B(n) \to E(n)$ будет ложной. Следовательно, формула логики предикатов $\forall n(A(n) \& B(n) \to E(n))$: является ложной.
Задача №1 Является ли формула логики предикатов $\forall x P(x) \to \exists x P(x)$ тождественно истинной?
Решение:
Используем закон замены импликации:
$\forall x P(x) \to \exists x P(x) \equiv \neg(\forall x P(x)) \vee \exists x P(x).$
Применим закон де Моргана и закон равносильностей логики предикатов (табл. Основные равносильности логики предикатов):
$$\neg(\forall x P(x)) \vee \exists x P(x) \equiv \exists x(\neg P(x)) \vee \exists x P(x) \equiv \exists x(\neg P(x)) \vee P(x)) \equiv 1.$$

Данная формула является тождественно истинной.

Задача №3

Записать формулу логики предикатов $F = \neg(\exists x(P(x) \to \forall y P(y)))$ в ПНФ.

Решение:

В преобразованиях будем использовать законы логики высказываний (табл. Основные равносильности логики высказываний) и логики предикатов (табл. Основные равносильности логики предикатов).

$$F \equiv \neg(\exists x(P(x) \to \forall y Q(y))) \equiv \forall x(\neg(\neg P(x) \vee \forall y Q(y))) \equiv$$

$$\equiv \forall x(P(x) \& \neg(\forall y Q(y))) \equiv \forall x(P(x) \& (\exists y \neg Q(y))) \equiv \forall x \exists y(P(x) \& \neg Q(y)).$$

Задание 2. Решить задачи1-8.

Задача1 .Даны утверждения:

A(n)= {число n делится на 3};

B(n)= {число n делится на 2};

C(n)= {число n делится на 4};

D(n)= {число n делится на 6};

E(n)={число n делится на 12}.

Будет ли истинна формула логики предикатов $\exists n(B(n) \& C(n) \to \neg D(n))$?

Задача 2.Найти области истинности предикатов:

1. $\frac{x^2+3x+2}{x^2+4x+3} = 0;$
2. $\begin{cases} x^2 - 13x + 40 \geq 0, \\ 2x^2 + x + 30 < 0. \end{cases}$

Задача *3*.Установить, какие из следующих предикатов истинны, а какие ложны, при условии, что область определения предикатов M совпадает с Z:

1. $\forall x((x^2 - 6x + 8 \geq 0) \vee (x^2 - 6x + 8 < 0));$
2. $\exists x(x^2 + x + 0{,}5 = 0).$

Задача *4*.Изобразить на диаграммах Эйлера-Венна области истинности предикатов:

1. $P(x) \to Q(x)$
2. $P(x) \leftrightarrow Q(x)$
3. $(P(x) \vee Q(x)) \& R(x)$

Задача.*5*.Проверить, являются ли формулы логики предикатов равносильными:

1. $F_1 = \forall x \overline{Q(x)} \to (\exists x P(x) \& \exists x Q(x));\quad F_2 = \exists x Q(x);$
2. $F_1 = \exists x P(x) \vee (\exists x P(x) \& \exists x \overline{Q(x)});\quad F_2 = \exists x P(x);$

Задача.*6*.Доказать, что формула является тождественно истинной:

$F = \forall x P(x) \to \exists x P(x).$

Задача *7*.Доказать, что формула является тождественно ложной:

$F = \exists x \exists y((F(x) \to F(y)) \& (F(x) \to \overline{F(y)}) \& F(x))$.

Задача *8*.Привести формулы к предваренной нормальной форме:

1. $\exists x(P(x) \to \forall y Q(y))$;

2. $P \to \exists x R(x)$;

3. $\forall x \exists y(A(x) \leftrightarrow A(y))$.

Итог работы: решения задач, защита

Практические занятия № 10
Применение языка логики предикатов для записи математических предложений, определений. Построение отрицаний.

Цель: усвоение основных понятий теории предикатов для записи математических предложений и приобретение навыков практической работы с формулами логики предикатов.

Задание 1. Повторить теоретический материал и ответить на вопросы:

– Дайте определение сколемовской формы.

– Что из себя представляет предварённая нормальная форма (ПНФ)?

– В соответствии с какими правилами строится сколемовская нормальная форма (СНФ) ?

Кванторные операции

Определим предикат $P(x,y)$ - “число x делится на число y”. $x,y \subset Z$. Истинность этого высказывания является частичной, так как можно выбрать числа x и y такие, что x не делится на y. А предикат $P(x)$ - “простое число x делится только на самого себя и единицу” является универсально истинным, так является истинным для любого значения x.

В логике предикатов частичная и всеобщая истинность обозначается отдельными специальными знаками – **кванторами**.

Если задан предикат $P(x)$, то особый интерес представляет рассмотрение следующих двух утверждений:

1. Неопределенное высказывание $P(x)$ истинно для всех $x \in M$.

2. Неопределенное высказывание $P(x)$ истинно хотя бы для одного элемента $x \in M$, или другими словами, существует элемент x множества M, для которого $P(x)$ - истинно.

Высказывания 1 и 2 в короткой форме будут выглядеть соответственно так:

$$\forall x P(x),\ x \in M,$$

$$\exists x P(x),\ x \in M.$$

Знак общности $\forall$ заменяет в словесных формулировках слова: *все, всякий, каждый, любой*. **Знак существования** $\exists$ употребляется вместо слов: *хотя бы один, найдется, существует*.

Под выражением $\forall x P(x)$ понимается высказывание, истинное, когда $P(x)$ истинно для каждого элемента из множества M и ложное в противном случае. Это высказывание уже не зависит от x. Под выражением $\exists x P(x)$ понимается высказывание, которое является истинным, если существует элемент $x \in M$, для которого $P(x)$ истинно, и ложным в противном случае.

Таким образом, предикат можно превратить в высказывание двумя способами: подставить конкретное значение x в предикат или использовать кванторы всеобщности и существования.

Переменная x, входящая в предикат $P(x)$, называется свободной *переменной*. Переменная x, входящая в выражение $\forall x P(x)$, называется переменной, связанной квантором всеобщности. А переменная x, входящая в выражение $\exists x P(x)$ - переменная, связанная квантором существования.

Кванторные операции применимы и к многоместным предикатам. Пусть на множестве M задан предикат $P(x, y)$.

Применение кванторной операции к предикату $P(x, y)$ по переменной x ставит в соответствие двуместному предикату $P(x, y)$ одноместный предикат $\forall x P(x, y)$, зависящий от переменной y и не зависящей от переменной x. К двуместному предикату можно применять кванторы, как по переменной x, так и по переменной y, при этом возможны следующие варианты: $\forall y \forall x P(x, y)$; $\exists y \forall x P(x, y)$; $\forall y \exists x P(x, y)$; $\exists y \exists x P(x, y)$; $\forall x \forall y P(x, y)$; $\exists x \forall y P(x, y)$; $\forall x \exists y P(x, y)$; $\exists x \exists y P(x, y)$.

Правила перестановки кванторов.

Стоящие рядом одноименные кванторы можно переставлять местами. Следовательно, формулы $\forall x \forall y P = \forall y \forall x P$ и $\exists x \exists y P = \exists y \exists x P$ являются общезначимыми.

Разноименные кванторы можно переставлять не всегда.

Для каждой формулы P и любых предметных переменных x и y формула $\exists x \forall y P \to \forall y \exists x P$ логически общезначима, а обратная импликация $\forall y \exists x P \to \exists x \forall y P$ не всегда является логически общезначимой.

Равносильности логики предикатов

Помимо эквивалентностей логики высказываний для логики предикатов справедливы следующие эквивалентности ($A(x)$, $B(x)$, $P(x, y)$ - предикаты, а C - высказывание):

Комбинация кванторов:

1. $\forall x \forall y P(x, y) = \forall y \forall x P(x, y)$;
2. $\exists x \exists y P(x, y) = \exists y \exists x P(x, y)$;
3. $\forall x \exists y P(x, y) \neq \exists y \forall x P(x, y)$.

Комбинация кванторов и отрицаний:

1. $\overline{\forall x A(x)} = \exists x \overline{A(x)}$;
2. $\overline{\exists x A(x)} = \forall x \overline{A(x)}$;
3. $\forall x A(x) = \overline{\exists x \overline{A(x)}}$;
4. $\exists x A(x) = \overline{\forall x \overline{A(x)}}$.

Расширение области действия кванторов (C не зависит от x):

1. $C \& \forall x B(x) = \forall x [C \& B(x)]$;

2. $C \vee \forall x B(x) = \forall x[C \vee B(x)]$;
3. $C \to \forall x B(x) = \forall x[C \to B(x)]$;
4. $\forall x[B(x) \to C] = \exists x B(x) \to C$;
5. $\exists x[C \vee B(x)] = C \vee \exists x B(x)$;
6. $\exists x[C \,\&\, B(x)] = C \,\&\, \exists x B(x)$;
7. $\exists x[C \to B(x)] = C \to \exists x B(x)$;
8. $\exists x[B(x) \to C] = \forall x B(x) \to C$.

Расширение области действия кванторов:
1. $\forall x A(x) \,\&\, \forall x B(x) = \forall x[A(x) \,\&\, B(x)]$;
2. $\exists x[A(x) \vee B(x)] = \exists x A(x) \vee \exists x B(x)$;
3. $\exists x A(x) \,\&\, \exists y B(y) = \exists x \exists y[A(x) \,\&\, B(y)]$;
4. $\exists x(A(x) \,\&\, B(x)) \to \exists x A(x) \,\&\, \exists x B(x)$;
5. $\forall x A(x) \vee \forall x B(x) \to \forall x(A(x) \vee B(x))$/

Предваренная и сколемовская нормальная формы

Формула логики предикатов имеет нормальную форму, если она содержит только операции конъюнкции, дизъюнкции и кванторные операции, а операция отрицания отнесена к элементарным формулам. Например, для формулы $(\exists x P(x) \to \forall y Q(y)) \to R(x)$ нормальной формой будет $\exists x P(x) \,\&\, \exists y \overline{Q(y)} \vee R(x)$.

Предварённая нормальная форма (ПНФ) - нормальная форма, в которой кванторные операции либо полностью отсутствуют, либо они используются после всех операций алгебры логики. Например, для нормальной формы $\forall x \exists y P(x,y) \,\&\, \forall x \exists z \overline{Q(x,z)}$ предваренной нормальной формой будет $\forall x \exists y \exists z (P(x,y) \,\&\, \overline{Q(x,z)})$.

Всякую формулу логики предикатов можно свести к ПНФ, если использовать следующий **алгоритм**:

Шаг 1. Исключение логических связок $\leftrightarrow$ и $\to$.

Шаг 2. Продвижение знака отрицания до атома. Многократно (пока это возможно) делаются замены:

$\overline{\overline{A}} = A$,

$\overline{A \vee B} = \overline{A} \,\&\, \overline{B}$,

$\overline{A \,\&\, B} = \overline{A} \vee \overline{B}$,

$\overline{\forall x A(x)} = \exists x \overline{A(x)}$,

$\overline{\exists x A(x)} = \forall x \overline{A(x)}$.

Шаг 3. Переименование связанных переменных.

Шаг 4. Вынесение кванторов. Для вынесения кванторов используются формулы эквивалентности для исчисления предикатов.

После выполнения четвертого шага получаем ПНФ.

Переименовывать связанные переменные необходимо только в самом кванторе и в области действия этого квантора. Одинаковые переменные, для которых связывающие их кванторы имеют различные области действия, могут переименовываться разным образом или одна из них может переименовываться, а другая нет.

Задание 2. Рассмотрите пример 1 и пример2 и на их основе решите задания своего варианта.

Пример 1. Пусть имеем формулу $\forall x((\exists y P(x,y) \to \forall y Q(x,y)) \to R(x))$. Нормальная формула имеет вид $\forall x(\exists y P(x,y) \,\&\, \exists y \overline{Q(x,y)} \vee R(x))$.

Переименовываем переменную x в кванторе и в области действия этого квантора на z.

$\forall z(\exists y P(z,y) \,\&\, \exists y \overline{Q(z,y)} \vee R(z))$.

В полученной формуле переменную y можно переименовать на w в первой посылке и на u во второй посылке, либо оставить во второй посылке без изменения

$$\forall z \exists w(P(z,w) \,\&\, \exists y \overline{Q(z,y)} \vee R(z)) = \forall z \exists w \exists y(P(z,w) \,\&\, \overline{Q(z,y)} \vee R(z))$$

Формула F называется $\forall$- формулой, если она представлена в ПНФ, причем кванторная часть состоит только из кванторов всеобщности, т.е. $F = \forall x_1 \forall x_2 ... \forall x_m P$, где P – бескванторная формула. Отсюда возникает задача устранения кванторов существования в формулах, представленных в ПНФ. Это можно сделать путем введения сколемовских функций.

Сколемовская форма – это такая предварённая форма, в которой исключены кванторы существования.

Сколемовская нормальная форма (СНФ) строится в соответствии со следующими правилами:

1. Формула логики предикатов представляется в ПНФ.
2. Последовательно (слева направо) вычеркиваем каждый квантор существования, например $\exists y$, заменяя все вхождения переменной y на новый еще не использованный функциональный символ f, в качестве аргументов f берем все переменные, связанные предшествующими $\exists y$ кванторами всеобщности. Функциональный символ f называется сколемовской функцией.

Формула логики предикатов, полученная после выполнения шагов 1 и 2, называется сколемовской норм*альной формой (СНФ).*

Пример 2. $\exists x \forall y \forall z \exists u \exists v \exists w(P(x,y) \vee \overline{R(z,u,v)} \,\&\, Q(u,w))$

Для получения СНФ вычеркиваем фактор существования $\exists x$ и все вхождения переменной x заменяем на константу c, поскольку квантору $\exists x$ не предшествует ни один квантор всеобщности, то есть сколемовская функция не зависит ни от одной переменной, то есть эта функция является константой.

$\forall y \forall z \exists u \forall v \exists w(P(c,y) \vee \overline{R(z,u,v)} \,\&\, Q(u,w))$

На следующем шаге вычеркиваем квантор существования $\exists u$ и все вхождения переменной u заменяем на функцию $f(y,z)$

$\forall y \forall z \forall v \exists w(P(c,y) \vee \overline{R(z, f(y,z), v)} \,\&\, Q(f(y,z), w))$.

На последнем шаге вычеркиваем квантор $\exists w$.

$\forall y \forall z \forall v(P(c,y) \vee \overline{R(z, f(y,z), v)} \& Q(f(y,z), g(y,z,v)))$.

Вариант 1

1. Какие из следующих выражений являются предикатами. Выделите среди предикатов высказывания.

- Число x - простое;
- $x = y + z$;
- $x = 2y + 3$;
- $2x + y$;
- все подобные треугольники равны;
- $x^2 + y^2 < 0 \quad (x, y - \textit{действительные числа})$;
- все четные числа делятся на число y;
- все четные числа делятся на 2;
- 8 – нечетное число;
- имеется бесчисленное множество различных простых чисел;
- число $2^{67} - 1$ не является простым.

2. Пусть переменные в нижеследующих выражениях выбираются из множества действительных чисел, а алгебраические знаки имеют свои обычные значения. Определить, истинны ли эти выражения:

- $\forall x \forall y(x + y = y + x)$;
- $(\forall x \forall y(x + y = 3) \to (2 = 3)$.

3. Указать свободные и связанные переменные $\exists x A(x) \& B(x)$.

4. Найти отрицание следующей формулы $\exists x(A(x) \& \mathrm{B}(\mathrm{x}) \& \mathrm{C}(\mathrm{x}))$

5. Привести следующую формулу логики предикатов сначала к предваренной нормальной форме (ПНФ), затем к сколемовской нормальной форме (СНФ).

$\exists x \forall y P(x,y) \vee \exists x \forall y Q(x,y)$

Вариант 2

1. Какие из следующих выражений являются предикатами. Выделите среди предикатов высказывания.

- Число x - простое;
- $x = y + z$;
- $x = 2y + 3$;
- $2x + y$;
- все подобные треугольники равны;
- $x^2 + y^2 < 0 \quad (x, y - \textit{действительные числа})$;
- все четные числа делятся на число y;
- все четные числа делятся на 2;
- 8 – нечетное число;
- имеется бесчисленное множество различных простых чисел;
- число $2^{67} - 1$ не является простым.

2. Пусть переменные в нижеследующих выражениях выбираются из множества действительных чисел, а алгебраические знаки имеют свои обычные значения. Определить, истинны ли эти выражения:
- $\forall x \exists y (x + y = 3)$;
- $\exists x \exists y ((x > y > 0) \,\&\, (x + y = 0))$.

3. Указать свободные и связанные переменные $\exists x \forall y P(x) \,\&\, Q(y) \to \forall x R(x)$.

4. Найти отрицание следующей формулы $\forall x (A(x) \to \forall y B(y))$

5. Привести следующую формулу логики предикатов сначала к предваренной нормальной форме (ПНФ), затем к сколемовской нормальной форме (СНФ).
$\exists x \forall y P(x, y) \to \exists x \forall y Q(x, y)$

Вариант 3

1. Какие из следующих выражений являются предикатами. Выделите среди предикатов высказывания.
- Число x - простое;
- $x = y + z$;
- $x = 2y + 3$;
- $2x + y$;
- все подобные треугольники равны;
- $x^2 + y^2 < 0 \quad (x, y - \textit{действительные числа})$;
- все четные числа делятся на число y;
- все четные числа делятся на 2;
- 8 – нечетное число;
- имеется бесчисленное множество различных простых чисел;
- число $2^{67} - 1$ не является простым.

2. Пусть переменные в нижеследующих выражениях выбираются из множества действительных чисел, а алгебраические знаки имеют свои обычные значения. Определить, истинны ли эти выражения:
- $\exists y \forall x (x + y = 3)$;
- $\forall x ((x^2 > x) \leftrightarrow ((x > 1) \vee (x < 0)))$.

3. Указать свободные и связанные переменные $P(x) \to \exists x Q(x)$.

4. Найти отрицание следующей формулы $\forall x (A(x) \vee \exists y B(y))$

5. Привести следующую формулу логики предикатов сначала к предваренной нормальной форме (ПНФ), затем к сколемовской нормальной форме (СНФ).
$\forall x \forall y [\exists z P(x, y) \,\&\, P(x, z)] \to \exists u Q(y, u)$

Вариант 4

1. Какие из следующих выражений являются предикатами. Выделите среди предикатов высказывания.
- Число x - простое;
- $x = y + z$;
- $x = 2y + 3$;
- $2x + y$;

– все подобные треугольники равны;
– $x^2 + y^2 < 0 \quad (x, y - \text{действительные числа})$;
– все четные числа делятся на число y;
– все четные числа делятся на 2;
– 8 – нечетное число;
– имеется бесчисленное множество различных простых чисел;
– число $2^{67} - 1$ не является простым.

2. Пусть переменные в нижеследующих выражениях выбираются из множества действительных чисел, а алгебраические знаки имеют свои обычные значения. Определить, истинны ли эти выражения:
– $\exists x \exists y (x + y = 3)$;
– $\forall x(((x > 2) \& (\overline{x > 3})) \leftrightarrow (2 < x \leq 3))$.

3. Указать свободные и связанные переменные $\exists x \exists y P(x, y) \& Q(z)$.

4. Найти отрицание следующей формулы $\exists x(R(x) \leftrightarrow Q(x))$

5. Привести следующую формулу логики предикатов сначала к предваренной нормальной форме (ПНФ), затем к сколемовской нормальной форме (СНФ).
$\forall x \forall y[\exists z P(x, y, z) \& [\exists u Q(x, u) \to \exists u Q(y, u)]]$

Вариант 5

1. Какие из следующих выражений являются предикатами. Выделите среди предикатов высказывания.
– Число x - простое;
– $x = y + z$;
– $x = 2y + 3$;
– $2x + y$;
– все подобные треугольники равны;
– $x^2 + y^2 < 0 \quad (x, y - \text{действительные числа})$;
– все четные числа делятся на число y;
– все четные числа делятся на 2;
– 8 – нечетное число;
– имеется бесчисленное множество различных простых чисел;
– число $2^{67} - 1$ не является простым.

2. Пусть переменные в нижеследующих выражениях выбираются из множества действительных чисел, а алгебраические знаки имеют свои обычные значения. Определить, истинны ли эти выражения:
– $\forall x \forall y (x + y = 3)$;
– $\forall x(((x > 2) \& (x < 1)) \leftrightarrow (x \neq x))$.

3. Указать свободные и связанные переменные
$\forall z P(z) \& \exists x Q(x, z) \to \exists y R(z, y) \vee Q(z, x)$.

4. Найти отрицание следующей формулы $\forall x(A(x) \to B(x)) \& \exists x(\mathrm{S(x)} \ \& \ \overline{\mathrm{R(x)}})$

5. Привести следующую формулу логики предикатов сначала к предваренной нормальной форме (ПНФ), затем к сколемовской нормальной форме (СНФ).

$$\forall x \forall y[\exists z(P(x,z)\,\&\,P(y,z)) \to \exists y Q(x,y,u)]$$

Итог работы: решения задач, защита

Практическая работа № 11
Анализ аксиоматической теории. Построение выводов формул и теорем в исчислении высказываний.

Цель: Составить анализ аксиоматической теории. Изучить построение выводов формул и теорем в исчислении высказываний

Задание 1. Изучите и проанализируете теоретический материал.

Формальной аксиоматической теорией первого порядка (короче — теорией) в языке Ω называется упорядоченная пара hΩ, Γi, где Ω — язык первого порядка, Γ — множество замкнутых формул этого языка. Каждый элемент множества Γ называется собственной (или нелогической) аксиомой этой теории.

Пусть T hΩ, Γi — теория, A — формула языка Ω. Формула A называется теоремой теории T (а также выводимой в теории T), если Γ `H∀(Ω) A. То, что A — теорема теории T , будем обозначать через T ` A. В противном случае будем писать T 0 A.

Вывод из Γ будем называть выводом в теории T ; вывод формулы A из Γ будем называть выводом формулы A в теории T .

Теория hΩ, Γi называется непротиворечивой (соответственно, противоречивой, полной, неполной), если множество Γ непротиворечиво (соответственно, противоречиво, полно, неполно).

Пусть T hΩ, Γi — теория. Интерпретацией теории T называется любая интерпретация языка Ω. Моделью теории T называется любая модель множества Γ (т. е. интерпретация языка Ω, в которой истинны все собственные аксиомы этой теории).

Отметим, что исчисление предикатов H∀(Ω) можно рассматривать как теорию с пустым множеством всех собственных аксиом; любая интерпретация языка Ω является моделью этой теории.

Произвольное множество Γ замкнутых формул языка Ω можно отождествить с теорией hΩ, Γi. Так что теоремы 2.6.20, 2.6.21, 2.6.28–2.6.30 о множествах замкнутых формул легко сформулировать и в терминах теорий.

Например, теорему 2.6.21 о существовании модели можно переформулировать так: любая непротиворечивая теория имеет модель. Сформулируем и докажем аналог обобщённых теорем о корректности и полноте исчисления предикатов для теорий.

Теорема.

Пусть T hΩ, Γi — теория, A — формула языка Ω. Тогда T ` A, если и только если A истинна в любой модели теории T .

Д о к а з а т е л ь с т в о. По обобщённым теоремам о корректности и полноте исчисления H∀(Ω) Γ ` A равносильно Γ A. Γ A означает, что в любой интерпретации языка Ω при любой оценке выполняется: если все формулы из Γ

истинны, то A истинна. Поскольку все формулы из Г замкнуты, имеем: Г   A, если и только если в любой модели теории T истинна A.
Теорема.
Показывает, что вывод в теории является подходящим способом получения формул, истинных в любой модели этой теории. Непротиворечивость какой бы то ни было теории имеет первостепенную важность. Как показывает следующая лемма, в противоречивой теории T выводима любая формула языка этой теории, так что T бесполезна для получения теорем теории T . Если же обратиться к семантике, то по
теореме противоречивая теория не имеет модели.
Лемма. Пусть T — теория в языке Ω. Тогда T непротиворечива, если и только если существует невыводимая в T формула языка Ω.
Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, что если T непротиворечива, то существует невыводимая в T формула языка Ω. Чтобы доказать обратное утверждение, докажем утверждение, равносильное ему: если T противоречива, то любая формула языка Ω выводима в T . Пусть теория T противоречива, т. е. существует формула A языка Ω такая, что T ` A и T ` ¬A. Для любой формулы B языка Ω имеем ` ¬A ⊃ (A ⊃ B). Следовательно, T ` B. Таким образом, в противоречивой теории T выводима любая формула языка Ω.
Задание 2. Докажите, что каждое из двух следующих утверждений
равносильно противоречивости теории T : а) некоторая формула вида A∧¬A
выводима в T , б) некоторая формула вида A ≡ ¬A выводима в T . Обобщите
установленные результаты.
Задание 3. Выполнить задание своего варианта.
вариант 1
Постройте дерево доказательства секвенций, пользуясь правилами для ∧, ∨-вв., ⇒ :
a) A ∧ B ` B;
b) (A ∧ B) ∧ C ` A ∧ (B ∧ C);
c) A ` (A ∨ B) ∧ A;
d) A ∧ B ` A ∨ C;
e) ` A ⇒ A;
f) ` A ⇒ B ∨ A;
g) ` A ⇒ (B ⇒ A);
h) A ∧ B, A ⇒ (B ⇒ C) ` C.
вариант 2
Постройте дерево доказательства секвенций, пользуясь правилами для ¬, ¤ :
a) A ∧ B, ¬A ` ¤;
b) A ` ¬A ⇒ B;
c) ¬A ⇒ ¬B ` B ⇒ A;
d) A, ¬B ` ¬(A ⇒ B);
e) ` ¬(A ∧ ¬A);
f) ` (A ∧ ¬A) ⇒ B.
вариант 3

Постройте дерево доказательства секвенций, используя правило разбора случаев (∨-уд.) :
a) A ∨ B ` B ∨ A;
b) A ∨ (B ∧ A) ` A;
c) A ∨ B ` ¬A ⇒ B;
d) A ⇒ B ` A ∨ C ⇒ B ∨ C;
e) ` A ∨ ¬A;
f) A ∨ (B ∧ C) ` (A ∨ B) ∧ (A ∨ C).
вариант 4
Выведите секвенции:
a) ` A ⇒ (A ∧ B ⇔ B); b) ` ¬A ⇒ (A ∨ B ⇔ B);
c) ` (A ∧ B ⇒ C) ⇔ (A ⇒ (B ⇒ C));
d) A ⇒ B ∧ C, ¬D ⇒ ¬C ` A ⇒ B ∧ D.
вариант 5
Покажите, что :
a) ¬(A ∨ B) ≡ ¬A ∧ ¬B; b) ¬(A ∧ B) ≡ ¬A ∨ ¬B;
c) A ∧ (B ∨ C) ≡ (A ∧ B) ∨ (A ∧ C).

Практическое занятие предусматривает следующие виды упражнений:
1. Доказательство свойств формальных аксиоматических систем.
2. Доказательство эквивалентности формул в различных сигнатурах.
3. Нахождение интерпретаций и моделей аксиоматической теории.

Итог работы: решения задач, защита

Практическая работа № 12
Анализ теории первого порядка.

Цель: изучить и проанализировать теорию первого порядка.
Задание: изучить теоретический материал и проанализировать

Логика первого порядка (исчисление предикатов) — формальное исчисление, допускающее высказывания относительно переменных, фиксированных функций, и предикатов. Расширяет логику высказываний. В свою очередь является частным случаем логики высшего порядка.
Язык **логики первого порядка** строится на основе сигнатуры, состоящей из множества функциональных символов $\mathcal{F}$ и множества предикатных символов $\mathcal{P}$. С каждым функциональным и предикатным символом связана арность, то есть число возможных аргументов. Кроме того используются следующие дополнительные символы

- Символы переменных (обычно $x, y, z, x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$, и т. д.),
- Пропозициональные связки: $\vee, \wedge, \neg, \to$,
- Кванторы: всеобщности $\forall$ и существования $\exists$,
- Служебные символы: скобки и запятая.

Перечисленные символы вместе с символами из $\mathcal{P}$ и $\mathcal{F}$ образуют *Алфавит* **логики первого порядка**. Более сложные конструкции определяются <u>индуктивно</u>:

- <u>Терм</u> — есть символ переменной, либо имеет вид $f(t_1, \ldots, t_n)$, где f — функциональный символ арности n, а $t_1, \ldots, t_n$ — термы.
- <u>Атом</u> — имеет вид $p(t_1, \ldots, t_n)$, где p — предикатный символ арности n, а $t_1, \ldots, t_n$ — термы.
- <u>Формула</u> — это либо атом, либо одна из следующих конструкций: $\neg F, F_1 \vee F_2, F_1 \wedge F_2, F_1 \to F_2, \forall x F, \exists x F$, где F, F_1, F_2 — формулы, а x — переменная.

Переменная x называется *связанной* в формуле F, если F имеет вид $\forall x G$ либо $\exists x G$, или же представима в одной из форм $\neg H, F_1 \vee F_2, F_1 \wedge F_2, F_1 \to F_2$, причем x уже связанна в H, F_1 и F_2. Если x не связанна в F, ее называют *свободной* в F. Формулу без свободных переменных называют *замкнутой формулой,* или предложением. Теорией первого порядка называют любое множество предложений.

Система логических <u>аксиом</u> **логики первого порядка** состоит из аксиом <u>исчисления высказываний</u> дополненной двумя новыми аксиомами:

- $\forall x A \to A[t/x]$,
- $A[t/x] \to \exists x A$,

где $A[t/x]$ — формула, полученная в результате подстановки терма t вместо переменной x в формуле A.

<u>Правило вывода</u> только одно — **<u>Modus ponens</u>**:

$$\frac{A, A \to B}{B}$$

В <u>классическом случае</u> интерпретация формул **логики первого порядка** задается на *модели первого порядка*, которая определяется следующими данными

- *Несущее множество* $\mathcal{D}$,
- *Семантическая функция* σ, отображающая
- каждый n-арный функциональный символ f из $\mathcal{F}$ в n-арную функцию $\sigma(f) : \mathcal{D} \times \ldots \times \mathcal{D} \to \mathcal{D}$,
- каждый n-арный предикатный символ p из $\mathcal{P}$ в n-арное отношение $\sigma(p) \subseteq \mathcal{D} \times \ldots \times \mathcal{D}$.

Обычно принято, отождествлять несущее множество $\mathcal{D}$ и саму модель, подразумевая неявно семантическую функцию, если это не ведет к неоднозначности.

Предположим s — функция, отображающая каждую переменную в некоторый элемент из $\mathcal{D}$, которую мы будем называть *подстановкой*. Интерпретация $[\![t]\!]_s$ терма t на $\mathcal{D}$ относительно подстановки s задается индуктивно

- $[\![x]\!]_s = s(x)$, если x — переменная,
- $[\![f(x_1, \ldots, x_n)]\!]_s = \sigma(f)([\![x_1]\!]_s, \ldots, [\![x_n]\!]_s)$

В таком же духе определяется *отношение истинности* $\models_s$ формул на $\mathcal{D}$ относительно s

- $\mathcal{D} \models_s p(t_1, \dots, t_n)$, тогда и только тогда, когда $\sigma(p)([\![x_1]\!]_s, \dots, [\![x_n]\!]_s)$,
- $\mathcal{D} \models_s \neg\phi$, тогда и только тогда, когда $\mathcal{D} \models_s \phi$ — ложно,
- $\mathcal{D} \models_s \phi \wedge \psi$, тогда и только тогда, когда $\mathcal{D} \models_s \phi$ и $\mathcal{D} \models_s \psi$ истинны,'
- $\mathcal{D} \models_s \phi \vee \psi$, тогда и только тогда, когда $\mathcal{D} \models_s \phi$ или $\mathcal{D} \models_s \psi$ истинно,
- $\mathcal{D} \models_s \phi \to \psi$, тогда и только тогда, когда $\mathcal{D} \models_s \phi$ влечет $\mathcal{D} \models_s \psi$,
- $\mathcal{D} \models_s \exists x\, \phi$, тогда и только тогда, когда $\mathcal{D} \models_{s'} \phi$ для некоторой подстановки s', которая отличается от sтолько на переменной x,
- $\mathcal{D} \models_s \forall x\, \phi$, тогда и только тогда, когда $\mathcal{D} \models_{s'} \phi$ для всех подстановок s', которые отличается от s только на переменной x.

Формула ϕ, истинна на $\mathcal{D}$, что обозначается как $\mathcal{D} \models \phi$, если $\mathcal{D} \models_s \phi$, для всех подстановок s. Формула ϕназывается *общезначимой*, что обозначается как $\models \phi$, если $\mathcal{D} \models \phi$ для всех моделей $\mathcal{D}$. Формула ϕ называется *выполнимой* , если $\mathcal{D} \models \phi$ хотя бы для одной $\mathcal{D}$.

Логика первого порядка обладает рядом полезных свойств, которые делают ее очень привлекательной в качестве основного инструмента формализации математики. Главными из них являются полнота и непротиворечивость. При этом если непротиворечивость более или менее очевидна, то полнота — нетривиальный результат полученный Гёделем в 1930 году (теорема Гёделя о полноте). По сути теорема Гёделя устанавливает фундаментальную эквивалентность понятий доказуемости и обще значимости.

Логика первого порядка как формальная модель рассуждений Править

Являясь формализованым аналогом обычной логики, логика первого порядка дает возможность строго рассуждать об истинности и ложности утверждений и об их взаимосвязи, в частности, о логическом следовании одного утверждения из другого, или, например, об их эквивалентности. Рассмотрим классический пример формализации утверждений естественного языка в логике первого порядка.

Возьмем рассуждение «Каждый человек смертен. Конфуций — человек. Следовательно, Конфуций смертен». Обозначим «x есть человек» через ЧЕЛОВЕК(x) и «x смертен» через СМЕРТЕН(x). Тогда утверждение «каждый человек смертен» может быть представлено формулой: (∀x)(ЧЕЛОВЕК(x) → СМЕРТЕН(x)) утверждение «Конфуций — человек» формулой ЧЕЛОВЕК(Конфуций), и «Конфуций смертен» формулой СМЕРТЕН(Конфуций). Утверждение в целом теперь может быть записано формулой

(∀x)(ЧЕЛОВЕК(x) → СМЕРТЕН(x)) ∧ ЧЕЛОВЕК(Конфуций) → СМЕРТЕН(Конфуций)

Логика первого порядка обладает свойством компактности, что означает: если некоторое множество формул не выполнимо, то невыполнимо также некоторое его конечное подмножество.

Согласно теореме Левенгейма-Сколема если множество формул имеет модель, то оно также имеет модель не более чем счетной мощности. С этой теоремой связан парадокс Сколема, который однако является лишь мнимым парадоксом.

Итог работы: решения задач, защита

Практическая работа № 13
Решение задач с использованием теории первого порядка.

Цель: Изучить решение задач с использованием теории первого порядка.

Задание: Изучить теоретический материал и рассмотреть примеры решение задач с использованием теории первого порядка.

Язык логики первого порядка LΣ определяется его сигнатурой Σ. Помимо всех символов сигнатуры, в алфавит языка LΣ входят два фиксированных счётных алфавита свободных и связанных переменных
FrVar = {a0, a1, a2, . . . },
BdVar = {v0, v1, v2, . . . },
и следующие специальные символы:
Булевы связки: →, ¬, ∧, ∨;
Кванторы: ∀ (квантор общности, «для всех»);
∃ (квантор существования, «существует»);
Знаки пунктуации: «(», «)» (скобки) и «,» (запятая).
Произвольное слово в описанном алфавите называем выражением. Некоторые выражения называются термами и формулами. Множества термов и формул языка LΣ определяются индуктивно.
Множество термов TmΣ есть наименьшее множество, замкнутое относительно следующих правил:
1. Свободные переменные и константы суть термы.
2. Если f — функциональный символ валентности n и t1, . . . , tn — термы, то выражение f(t1, . . . , tn) есть терм.
Пример 1. Если f ∈ FuncΣ — бинарный функциональный символ, то f(a0, a1)
— терм, а f(v0, a1) — не терм.
Множество формул FmΣ есть наименьшее множество, замкнутое относительно следующих правил:
1. Если P — предикатный символ валентности n и t1, . . . , tn — термы, то P(t1, . . . , tn) есть формула (называемая атомарной формулой).
2. Если A, B — формулы, то формулами являются также выражения (A →B), ¬A, (A ∧ B), (A ∨ B).
3. Если A — формула, и a — свободная переменная, то для любой связанной переменной x, не входящей в A, выражения (∀xA[a/x]) и (∃xA[a/x]) — формулы. (Здесь A[a/x] означает результат замены всех вхождений a в A на x.)

Пример 2. $f(a0, a1) = f(a0, a1)$ и $(\forall v0(\forall v1 f(v0, v1) = f(v0, v1)))$ — формулы (с учётом соглашения о написании предиката =), а $g(a0) = g(v1)$ — не формула. Формулы, в которые не входят кванторы, называются бескванторными. Формулы и термы, в которые не входят свободные переменные, называются замкнутыми. Замкнутые формулы также называются предложениями.

Так же как и в логике высказываний, в логике предикатов действуют стандартные соглашения об опускании скобок, сокращения для логических связок, и другие сокращения. В частности,

- пишут буквы a, b, c вместо a0, a1, a2 и т.д.; x, y, z вместо v0, v1, v2 и т.д.;
- пишут $\forall x1 \ldots xnA$ вместо $(\forall x1(\forall x2(\ldots(\forall xnA)\ldots)))$ и аналогично для последовательностей кванторов существования.

Семантика логики первого порядка

Пусть M — модель сигнатуры Σ. Обозначим через Σ(M) сигнатуру, получаемую из Σ добавлением новых символов констант {c : c ∈ M}. Для каждого элемента c ∈ M добавляется ровно одна константа c, и все эти символы отличны друг от друга и от символов сигнатуры Σ.

Определение. Пусть t — замкнутый терм языка LΣ(M). Значение терма t в модели M есть элемент tM ∈ M, определяемый индукцией по построению t.

(i) Если a ∈ M, то aM

(ii) Если c ∈ ConstΣ, то cM ∈ M есть данная нам интерпретация c.

(iii) Если t есть f(t1, . . . , tn), где f ∈ FuncΣ, то tM

fM((t1)M, . . . ,(tn)M).

Определение. Пусть A — замкнутая формула языка LΣ(M) . Истинностное значение формулы A в модели M определяется индукцией по построению A (отношение M A читается «формула A истинна в модели M»).

1. M P(t1, . . . , tn)

def ⇐⇒ PM((t1)M, . . . ,(tn)M), если A = P(t1, . . . , tn) — атомарная формула;

2. M (B → C) def ⇐⇒ (M 2 B или M C);

3. M ¬B def ⇐⇒ M 2 B;

4. M (B ∧ C) def ⇐⇒ (M B и M C);

5. M (B ∨ C) def ⇐⇒ (M B или M C);

6. M (∀xB[a/x]) def ⇐⇒ для всех x ∈ M M B[a/x];

7. M (∃xB[a/x]) def ⇐⇒ существует x ∈ M M B[a/x].

Если список b1, . . . , bn содержит все свободные переменные формулы A, а x1, . . . , xn ∈ M, то M A[b1/x1 , . . . , bn/xn] сокращённо записываем как M A[b1/x1, . . . , bn/xn] или даже M A[x1, . . . , xn].

Замечание. Нельзя говорить об истинности или ложности незамкнутых формул, поскольку их истинностные значения зависят от выбора значений параметров — входящих в формулу свободных переменных.

Пример 3. Формула a + 1 = b в стандартной модели арифметики может быть как истинна, так и ложна, в зависимости от значений a и b.

Пример 4. В модели (N; =, S, +, ·, 0) истинна формула $\exists x, y, z\, (\neg x = 0 \land \neg y = 0 \land x \cdot x + y \cdot y = z \cdot z)$ и ложна формула $\exists x, y, z\, (\neg x = 0 \land \neg y = 0 \land x \cdot x \cdot x + y \cdot y \cdot y = z \cdot z \cdot z)$.

Пример 5. В модели (R^2 ; =, ∼=, B) истинна формула ∀x, y, y0 , z (B(x, y, z) ∧ B(x, y0 , z) → B(x, y, y0) ∨ B(x, y0 , y)).
Эта же формула верна и в модели (H2 ; =, ∼=, B).
Определимые предикаты и функции
Пусть b1,., bn — упорядоченный набор свободных переменных. Запись A(b1,. , bn) означает, что все свободные переменные формулы A входят в набор b1, . , bn.
Для фиксированного набора переменных любая формула A(b1, . . . , bn) определяет n-местный предикат AM в модели M:
AM(x1, . . . , xn) def ⇐⇒ M A[b1/x1, . . . , bn/xn].
Определение. Предикат P(x1, . . . , xn) называется определимым (или выразимым) в модели (M; Σ), если P = AM для некоторой формулы A(a1, . . . , an) в языке LΣ.
Определение. Функция f называется определимой в модели M, если определим её график, то есть предикат Gf (x1, . . . , xn, y) def ⇐⇒ f(x1, . . . , xn) = y.
Пример 6. В модели (Z; ≤) предикат a2 = a1 + 1 определим формулой a1 ≤ a2 ∧ ∀v0 (v0 ≤ a2 → (v0 ≤ a1 ∨ a2 ≤ v0)).
Следовательно, функция последователя s(x) x + 1 определима в модели (Z; ≤).
Пример 7. (Аксиома о параллельных)
Определим следующие предикаты в (R^2 ; =, ∼=, B).
- a 6= b ¬ a = b
- c ∈ ab «c лежит на прямой ab»: c ∈ ab (B(c, a, b) ∨ B(a, c, b) ∨ B(a, b, c)).
- abkcd «прямые ab и cd параллельны»: abkcd (a 6= b∧c 6= d∧¬∃x (x∈ab∧x ∈ cd)).

Аксиома о параллельных
«Через точку z вне прямой xy можно провести не более одной прямой параллельной данной.»
может быть выражена следующим образом: ∀x, y, z (x 6= y ∧ ¬ z ∈ xy → ∀u, v (zukxy ∧ zvkxy → v ∈ zu)).
Это утверждение верно в R^2, но не в H2.
Пример 8. В модели (R; =, +, ·, 0, 1) выразимы порядок и деление.
- a ≤ b ∃x (b = a + (x · x))
- Предикат «a/b = c» выразим формулой

D(a, b, c) (b 6= 0 ∧ c · b = a).
Итог работы: решения задач, защита

4. ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

4.1<u>Основные издания:</u>

О-1 Информационные технологии и основы вычислительной техники : учебник. — Санкт-Петербург : Лань, 2020. — 264 с. — ISBN 978-5-8114-4287-4. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/148223.— Режим доступа: для авториз. пользователей.

<u>Дополнительные издания:</u>

Д – 1. Иванов Б.Н. Дискретная математика: учебник – М. Просвещение, 2002.
Д – 2. Горбатов В.А. Дискретная математика: учебник – М. Просвещение, 2002.

4.2 Электронные издания (электронные ресурсы)

1 Информационные технологии и основы вычислительной техники : учебник. — Санкт-Петербург : Лань, 2020. — 264 с. — ISBN 978-5-8114-4287-4. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/148223.— Режим доступа: для авториз. пользователей.

5. ЛИСТ ИЗМЕНЕНИЙ И ДОПОЛНЕНИЙ, ВНЕСЕННЫХ В МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

<table>
<tr><td colspan="2">№ изменения, дата внесения, № страницы с изменением</td></tr>
<tr><td>Было</td><td>Стало</td></tr>
<tr><td colspan="2">Основание:

Подпись лица, внесшего изменения</td></tr>
</table>