ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ИРКУТСКОЙ ОБЛАСТИ «ЧЕРЕМХОВСКИЙ ГОРНОТЕХНИЧЕСКИЙ КОЛЛЕДЖ ИМ. М.И. ЩАДОВА»

РАССМОТРЕНО
на заседании ЦК
«Общеобразовательных, экономических и транспортных дисциплин»
Протокол №5
«09» января 2024 г.
Председатель: А.К. Кузьмина

Утверждаю:
Зам. директора по УР
О.В. Папанова
«22» февраля 2024 г.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

по практическим занятиям студентов

учебной дисциплины

ЕН.01 Математика

08.02.01 Строительство и эксплуатация зданий и сооружений

Разработал:
Власова Т.В.

2024 г.

СОДЕРЖАНИЕ

1.ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Методические указания по практическим занятиям учебной дисциплины **«Математика»** составлены в соответствии с учебным планом и рабочей программы дисциплины по специальности ***08.02.01 Строительство и эксплуатация зданий и сооружений***.

Цель проведения практических (лабораторных) занятий: формирование практических умений, необходимых в последующей профессиональной и учебной деятельности.

Методические указания практических (лабораторных) занятий являются частью учебно-методического комплекса по учебной дисциплине и содержат:

- тему занятия (согласно тематическому плану учебной дисциплины);
- цель;
- оборудование (материалы, программное обеспечение, оснащение, раздаточный материал и др.);
- методические указания (изучить краткий теоретический материал по теме практического занятия);
- ход выполнения;
- форму отчета.

В результате выполнения полного объема заданий практических (лабораторных) занятий студент должен **уметь:**

– выполнять необходимые измерения и связанные с ними расчеты;

– вычислять площади и объемы деталей строительных конструкций, объемы земляных работ;

– применять математические методы для решения профессиональных задач.

При проведении практических работ применяются следующие технологии и методы обучения: индивидуальные, групповые, коллективные методы и технология проблемного обучения.

Методы и формы по численности участвующих выделяют:

• индивидуальные;
• групповые;
• коллективные.

Методы и формы по численности участвующих выделяют:

• индивидуальные;
• групповые;
• коллективные.

Оценка выполнения заданий практических (лабораторных) занятий

«Отлично» - теоретическое содержание курса освоено полностью, без пробелов, умения сформированы, все предусмотренные программой учебные задания выполнены, качество их выполнения оценено высоко.

«Хорошо» - теоретическое содержание курса освоено полностью, без пробелов, некоторые умения сформированы недостаточно, все предусмотренные программой учебные задания выполнены, некоторые виды заданий выполнены с ошибками.

«Удовлетворительно» - теоретическое содержание курса освоено частично, но пробелы не носят существенного характера, необходимые умения работы с освоенным материалом в основном сформированы, большинство предусмотренных программой обучения учебных заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий содержат ошибки.

«Неудовлетворительно» - теоретическое содержание курса не освоено, необходимые умения не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки.

В соответствии с учебным планом и рабочей программы дисциплины **«Математика»** на практические занятия отводится **36 часов.**

2. ПЕРЕЧЕНЬ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

№ п/п	Тема практических занятий	Количество часов
1.	**Практическое занятие №1.** Вычисление скалярного произведения векторов. Определение расстояния между точками и координат середины отрезка	2
2.	**Практическое занятие №2.** Применение векторов для решения геометрических и практических задач	2
3.	**Практическое занятие №3.** Определение взаимного расположения прямых и угла между ними, расстояния от точки до прямой	2
4.	**Практическое занятие №4.** Приведение уравнений кривых второго порядка к каноническому виду и их построение	2
5.	**Практическое занятие №5.** Расчет площадей многогранников различных форм	2
6.	**Практическое занятие №6.** Расчет площадей строительных конструкций	2
7.	**Практическое занятие №7.** Вычисление объёмов многогранников	2
8.	**Практическое занятие №8.** Вычисление объёмов деталей строительных конструкций, определение объема земляных работ	2
9.	**Практическое занятие №9.** Вычисление пределов последовательностей и функций с применением различных методов. Исследование функции на непрерывность, определение точек разрыва	2
10.	**Практическое занятие №10.** Составление уравнения касательной и нормали. Определение экстремумов функции. Вычисление наибольшего и наименьшего значений функции на заданном отрезке	2
11.	**Практическое занятие №11.** Применение производной к исследованию функции и для нахождения наилучшего решения в прикладных задачах	2
12.	**Практическое занятие №12.** Вычисление неопределённых интегралов методом замены переменных	2
13.	**Практическое занятие №13.** Вычисление неопределённых интегралов с помощью интегрирования по частям	2
14.	**Практическое занятие №14.** Вычисление определенных интегралов	2
15.	**Практическое занятие №15.** Построение криволинейной трапеции. Применение определенного интеграла к вычислению площадей плоских фигур и вычислению объёмов	2

16.	**Практическое занятие №16.** Вычисление вероятностей сложных событий. Теоремы сложения и умножения вероятностей. Формула полной вероятности и формула Бернулли	2
17.	**Практическое занятие №17.** Составление статистического распределения выборки. построение полигона и гистограммы	2
18.	**Практическое занятие №18.** Построение полигона и гистограммы	2

3. СОДЕРЖАНИЕ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

Практическое занятие №1

Тема: вычисление скалярного произведения векторов. Определение расстояния между точками и координат середины отрезка.

Цель: научиться находить координаты вектора, скалярное произведение векторов, угол между векторами.

Оборудование: раздаточный материал.

Методические указания: изучить теоретический материал.

Вектором называется направленный отрезок прямой.

Вектор с началом в точке А и концом в точке В обозначается $\vec{AB}$. Для обозначения векторов употребляются также строчные латинские буквы: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{x}\ldots$.

Два вектора называются **коллинеарными**, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

Коллинеарные векторы, направленные в одну сторону, называются **сонаправленными**.

Коллинеарные векторы, направленные в противоположные стороны, - **противоположно направленными**.

Два вектора называются **равными**, если они сонаправлены и равны по модулю.

Сложение векторов. Для того чтобы построить сумму двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, нужно выбрать произвольную точку А и отложить от неё вектор $\vec{AB}=\vec{a}$, а затем от точки В отложить вектор $\vec{BC}=\vec{b}$. Тогда вектор $\vec{AC}$ является искомой суммой: $\vec{AB}+\vec{BC}=\vec{AC}$.

Координаты вектора $\vec{AB}$ с началом в точке А$(x_1;y_1;z_1)$ и концом в точке В $(x_2;y_2;z_2)$ равны $(x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1)$.

Длина вектора $\vec{AB}$ вычисляется по формуле:

$$\left|\vec{AB}\right|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

Суммой векторов $\vec{a}(a_1;a_2;a_3)$ и $\vec{b}(b_1;b_2;b_3)$ называется вектор $\vec{c}$ с координатами $(a_1+b_1;a_2+b_2;a_3+b_3)$.

Произведением вектора $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$ на число λ называется вектор $\lambda\vec{a}(\lambda a_1; \lambda a_2; \lambda a_3)$.

Скалярным произведением двух ненулевых векторов называется произведение длин этих векторов на косинус угла между ними. Если хотя бы один из векторов нулевой, то их скалярное произведение равно нулю.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi,$$

где φ - угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Свойства скалярного произведения векторов:

- переместительное свойство: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$;

- сочетательное свойство: $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{b} \cdot \vec{a})$;

- распределительное свойство: $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$.

Скалярное произведение двух векторов равно сумме произведений одноименных координат этих векторов:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Формула для вычисления угла между векторами:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

Эта же формула в координатах:

$$\cos\varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

Ход выполнения: выполнить задания.

Задание 1. Дан $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – параллелепипед. Найти $\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA_1} + \vec{CD}$.

Задание 2. Найти координаты вектора $0{,}3\vec{a} - 0{,}6\vec{b} + 0{,}2\vec{c} - 5\vec{d}$, если $\vec{a}(-1; 2; 4)$, $\vec{b}(0; 5; 3)$, $\vec{c}(3; 3; 3)$, $\vec{d}(1; 1; 4)$.

Задание 3. Даны точки *A(1;3;0)*, *B(2;3;-1)* и *C(1;2;-1)*. Вычислите угол между векторами $\vec{CA}$ и $\vec{CB}$.

Задание 4. Известно, что $\vec{a}\,\hat{}\,\vec{c} = \vec{b}\,\hat{}\,\vec{c} = 30^\circ$, $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = |\vec{c}| = 3$. Вычислите $(\vec{a} + \vec{b})\vec{c}$.

Форма отчета: устный отчет по решению задач.

Практическое занятие №2

Тема: применение векторов для решения геометрических и практических задач.

Цель: систематизировать и обобщить полученные теоретические и практические знания по теме «Векторы».

Оборудование: раздаточный материал.

Методические указания: изучить теоретический материал.

Перечислим свойства скалярного, векторного и смешанного произведений, применяемые при решении геометрических задач. Предполагается, что координаты векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, указанные в формулах, найдены относительно стандартного базиса $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ в пространстве:

$$\vec{a} = x_a \vec{i} + y_a \vec{j} + z_a \vec{k}, \qquad \vec{b} = x_b \vec{i} + y_b \vec{j} + z_b \vec{k}, \qquad \vec{c} = x_c \vec{i} + y_c \vec{j} + z_c \vec{k}.$$

Напомним, что в стандартном базисе скалярное, векторное, смешанное произведения векторов вычисляются по формулам:

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b + z_a \cdot z_b; \qquad [\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix}; \qquad (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix}$$

1. Вектор $\vec{a} = \vec{o}$ тогда и только тогда, когда

$$\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = 0 \iff x_a^2 + y_a^2 + z_a^2 = 0 \iff x_a = y_a = z_a = 0.$$

2. Ненулевые векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ортогональны тогда и только тогда, когда

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0 \iff x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b + z_a \cdot z_b = 0.$$

3. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{o} \iff \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix} = \vec{o} \iff \frac{x_a}{x_b} = \frac{y_a}{y_b} = \frac{z_a}{z_b}.$$

4. Векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны тогда и только тогда, когда

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \iff \begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix} = 0.$$

5. Длина вектора $\vec{a}$ вычисляется по формуле:

$$|\vec{a}| = \sqrt{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle} = \sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2}.$$

6. Угол φ между ненулевыми векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ вычисляется по формуле:

$$\cos\varphi = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{\sqrt{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle} \cdot \sqrt{\langle \vec{b}, \vec{b} \rangle}} = \frac{x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b + z_a \cdot z_b}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2} \cdot \sqrt{x_b^2 + y_b^2 + z_b^2}}.$$

7. Алгебраическое значение длины ортогональной проекции вектора $\vec{a}$ на ось, задаваемую вектором $\vec{b} \neq \vec{o}$, находится по формуле:

$$\text{pr}_{\vec{b}}\, \vec{a} = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{|\vec{b}|} = \frac{x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b + z_a \cdot z_b}{\sqrt{x_b^2 + y_b^2 + z_b^2}}$$

8. Ортогональная проекция вектора $\vec{a}$ на ось, задаваемую вектором $\vec{b} \neq \vec{o}$:

$$\overrightarrow{\mathrm{pr}}_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{(\vec{a},\vec{b})}{(\vec{b},\vec{b})}\cdot\vec{b} = \frac{x_a\cdot x_b + y_a\cdot y_b + z_a\cdot z_b}{x_b^2+y_b^2+z_b^2}\cdot(x_b\cdot\vec{i}+y_b\cdot\vec{j}+z_b\cdot\vec{k}).$$

9. Направляющие косинусы вектора $\vec{a}$ находятся по формулам:

$$\cos\alpha = \frac{(\vec{a},\vec{i})}{|\vec{a}|} = \frac{x_a}{\sqrt{x_a^2+y_a^2+z_a^2}};\quad \cos\beta = \frac{(\vec{a},\vec{j})}{|\vec{a}|} = \frac{y_a}{\sqrt{x_a^2+y_a^2+z_a^2}};\quad \cos\gamma = \frac{(\vec{a},\vec{k})}{|\vec{a}|} = \frac{z_a}{\sqrt{x_a^2+y_a^2+z_a^2}}.$$

10. Единичный вектор $\vec{e}$, одинаково направленный с вектором $\vec{a}$, находится по формуле:

$$\vec{e} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \vec{i}\cdot\cos\alpha + \vec{j}\cdot\cos\beta + \vec{k}\cdot\cos\gamma.$$

11. Площадь $S_{*\vec{a},\vec{b}}$ параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, вычисляется по формуле:

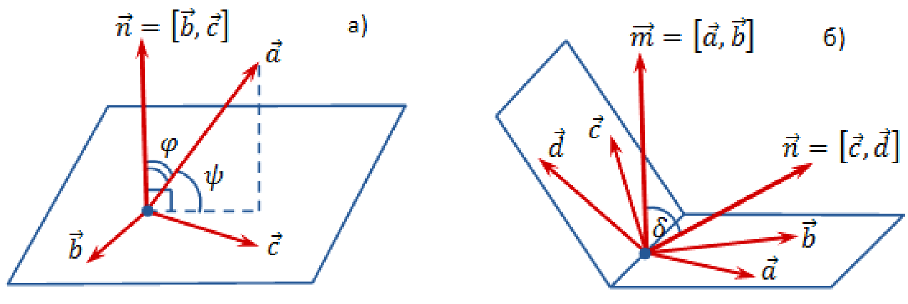
$$S_{*\vec{a},\vec{b}} = |[\vec{a},\vec{b}]|.$$

12. Объём $V_{*\vec{a},\vec{b},\vec{c}}$ параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, вычисляется по формуле: $V_{*\vec{a},\vec{b},\vec{c}} = |(\vec{a},\vec{b},\vec{c})|$.

13. Тройка некомпланарных векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ — правая (левая) тогда и только тогда, когда $(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) > 0$ (соответственно, $(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) < 0$).

14. Высота h параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a},\vec{b}$, вычисляется по формуле:

$$h = \frac{S_{*\vec{a},\vec{b}}}{|\vec{a}|} = \frac{|[\vec{a},\vec{b}]|}{\sqrt{(\vec{a},\vec{a})}}.$$



15. Высота h параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, находится по формуле:

$$h = \frac{V_{*\vec{a},\vec{b},\vec{b}}}{S_{*\vec{b},\vec{c}}} = \frac{|[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]|}{|[\vec{b},\vec{c}]|}.$$

16. Угол ψ между вектором $\vec{a}$ и плоскостью, содержащей векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$, дополняет до прямого угла угол φ между вектором $\vec{a}$ и вектором $\vec{n} = [\vec{b},\vec{c}]$, перпендикулярным плоскости, и вычисляется по формуле:

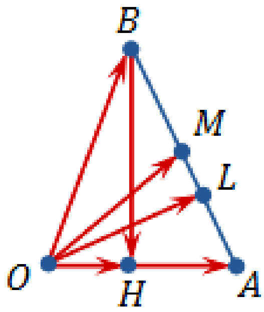
$$\sin\psi = |\cos\varphi| = \frac{|(\vec{a},\vec{b},\vec{c})|}{|\vec{a}|\cdot|[\vec{b},\vec{c}]|}.$$

17. Угол δ между плоскостями, содержащими векторы $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}, \vec{d}$ соответственно, вычисляется как угол между векторами $\vec{m} = [\vec{a}, \vec{b}], \vec{n} = [\vec{c}, \vec{d}]$ перпендикулярными данным плоскостям, по формуле

$$\cos\delta = \frac{|([\vec{a}, \vec{b}], [\vec{c}, \vec{d}])|}{|[\vec{a}, \vec{b}]| \cdot |[\vec{c}, \vec{d}]|}.$$

Ход выполнения: выполнить задания.

Задание 1. На векторах $\overrightarrow{OA} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$ и $\overrightarrow{OB} = 12\vec{i} - 5\vec{j}$ построен треугольник OAB.



Требуется найти:

а) длины сторон треугольника;

б) длину медианы OM;

в) длину биссектрисы OL;

г) величину угла OAB;

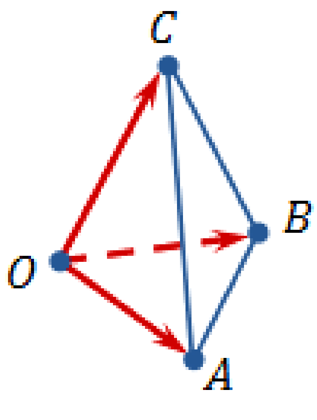
д) площадь треугольника;

е) координаты вектора $\overrightarrow{BH}$ (в стандартном базисе), где отрезок BH — высота треугольника.

Задание 2. На векторах

$$\overrightarrow{OA} = \vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}, \overrightarrow{OB} = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}, \overrightarrow{OC} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$$

построена треугольная пирамида $OABC$.



Требуется найти:

а) длины ребер OA, OB, OC;

б) величину φ угла AOC;

в) площадь S_{OAC} треугольника OAC;
г) объем пирамиды $OABC$;
д) высоту пирамиды h_B, опущенную из вершины B;
е) высоту h_A треугольника OAC, опущенную из вершины A;
ж) угол ψ между ребром OA и плоскостью грани OBC;
з) величину δ угла между плоскостями граней OAC и OBC;

и) радиус-вектор $\overrightarrow{OM}$, где M — точка пересечения медиан треугольника ABC;

к) радиус-вектор $\overrightarrow{ON}$, где точка N делит отрезок AM в отношении $AN : NM = 3 : 4$;
л) направляющие косинусы вектора OB;
м) алгебраическое значение ортогональной проекции вектора OA на направление вектора OB;
н) ортогональную проекцию вектора OA на прямую, перпендикулярную грани OBC;

о) единичный вектор $\vec{e}$ (орт), имеющий направление вектора $\overrightarrow{AB}$;

п) вектор $\vec{a}$, имеющий длину вектора $\overrightarrow{AB}$ и направление вектора $\overrightarrow{AC}$.

Форма отчета: устный отчет по решению задач.

Практическое занятие №3

Тема: определение взаимного расположения прямых и угла между ними, расстояния от точки до прямой.

Цель: научиться определять взаимного расположения прямых и угла между ними, расстояния от точки до прямой.

Оборудование: раздаточный материал.

Методические указания: изучить теоретический материал.

Определение. Под углом между двумя прямыми понимается один из двух смежных углов, образованных при их пересечении. Тангенс угла φ между двумя прямыми, угловые коэффициенты которых равны κ_1 и κ_2, вычисляется по формуле

$tg = \pm\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|$, (1)

причем знак "плюс" соответствует острому углу φ, а знак "минус"- тупому.

Заметим, что если хотя бы одна из данных прямых параллельна оси Oy, то формула (1) не имеет смысла. В этом случае острый угол φ вычисляется непосредственно по формуле $\varphi = |\varphi_1 - \varphi_2|$, где φ_1 и φ_2- углы наклона прямых к оси Ox.

Пример: **н**айти острый угол между прямыми $x - 3y + 5 = 0$ и $2x + 4y - 7 = 0$

Решение:

Угловые коэффициенты данных прямых таковы: $k_1 = \frac{1}{3}$, $k_2 = -\frac{1}{2}$. Тангенс острого угла между этими прямыми найдем по формуле (1):

$$tg\varphi = \left|\frac{-\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{2} \times (-\frac{1}{3})}\right| = 1$$

Отсюда φ=$45°$.

Ход выполнения: выполнить задания.

Задание 1. Определение взаимного расположения прямых и угла между ними, расстояния от точки до прямой:

1. Вычислить острый угол между прямыми:

a) $y = 3x - 5$ и $y = -2x + 3$;

b) $8x - 2y - 5 =$0 и $2x - 2y + 1 = 0$;

c) $3x + y + 7 = 0$ и $10x + 2y - 3 = 0$;

d) $x + 2y - 8 = 0$ и $5x - y + 3 = 0$.

2. Найти острый угол между прямыми $9x + 3y - 7 = 0$ и прямой, проходящей через точку $A(1; -1)$ и $B(5; 7)$.

3. Стороны треугольника заданы уравнением $3x - 2y = 6 = 0\ (AB); 2x + y - 10 = 0\ (BC); x - 3y + 2 = 0 (AC)$. Найдите углы, которые медиана, проведенная из точки B, образует со сторонами AB и BC.

4. Найти внутренние углы треугольника ABC с вершинами A(1;2), B(2;2), C(0;3).

5. Составить уравнение прямой, проходящей через точу M(-1;2) и составляющий угол $45°$ с прямой $x - 3y + 2 = 0$.

Форма отчета: устный отчет по решению задач.

Практическое занятие №4

Тема: приведение уравнений кривых второго порядка к каноническому виду и их построение.

Цель: научиться составлять уравнения кривых второго порядка, их построение.

Оборудование: раздаточный материал.

Методические указания: изучить теоретический материал.

Пусть в прямоугольной системе координат Oxy алгебраическая линия второго порядка задана уравнением:

$$a_{11} \cdot x^2 + 2 \cdot a_{12} \cdot x \cdot y + a_{22} \cdot y^2 + 2 \cdot a_1 \cdot x + 2 \cdot a_2 \cdot y + a_0 = 0.$$

Чтобы привести уравнение к каноническому виду, нужно выполнить следующие действия.

1. Если в уравнении имеется член с произведением неизвестных $(a_{12} \neq 0)$, то делаем поворот системы координат:

$$\begin{cases} x = x' \cdot \cos\varphi - y' \cdot \sin\varphi, \\ y = x' \cdot \sin\varphi + y' \cdot \cos\varphi \end{cases}$$

на угол $\varphi \left(0 < \varphi < \frac{\pi}{2}\right)$,

удовлетворяющий равенству $\operatorname{ctg} 2\varphi = \dfrac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}}$.

При этом получим "почти" приведенное уравнение линии второго порядка:

$$\lambda_1 \cdot (x')^2 + \lambda_2 \cdot (y')^2 + 2 \cdot a_1' \cdot x' + 2 \cdot a_2' \cdot y' + a_0 = 0.$$

Если $a_{12} = 0$, переходим к пункту 2, поворот системы координат делать не нужно, так как исходное уравнение имеет "почти" приведенный вид.

2. Выполняем параллельный перенос системы координат:

а) если в уравнении нет линейных членов, то переходим к пункту 3;

б) если в уравнении имеется линейный член с какой-либо неизвестной и квадратичный член с этой же неизвестной, то, дополняя эти члены до полного квадрата, делаем замену, чтобы в уравнении не стало линейного члена с этой неизвестной. Например, если в уравнении $\lambda_1 \neq 0$ и $a_1' \neq 0$,то выполняем преобразования:

$$\lambda_1 (x')^2 + 2 \cdot a_1' \cdot x' = \lambda_1 \left[(x')^2 + 2\frac{a_1'}{\lambda_1} x' + \left(\frac{a_1'}{\lambda_1}\right)^2 \right] - \lambda_1 \left(\frac{a_1'}{\lambda_1}\right)^2 = \lambda_1 \left(x' + \frac{a_1'}{\lambda_1}\right)^2 - \lambda_1 \left(\frac{a_1'}{\lambda_1}\right)^2,$$

а затем замену неизвестных $x'' = x' + \dfrac{a'}{\lambda_1},\ y'' = y'$, после которой в уравнении не будет линейного члена с неизвестной x'';

в) если в уравнении имеется только один линейный член с какой-либо неизвестной, а квадрат этой неизвестной отсутствует, то при помощи замены этой переменной надо сделать равным нулю свободный член уравнения. Например, если уравнение имеет вид

$$\lambda \cdot (x')^2 + 2 \cdot a_2' \cdot y' + a_0 = 0,$$

то, выполняя замену неизвестных $x'' = x',\ y'' = y' + \dfrac{a_0}{2a_0'}$, получаем уравнение без свободного члена:

$$\lambda_1 \cdot (x'')^2 + 2 \cdot a_2' \cdot y'' = 0.$$

3. Полученное в результате упрощений (пункт 2) уравнение имеет "почти" канонический вид. Для окончательного упрощения "почти" канонического уравнения при необходимости применяются следующие преобразования:

а) переименование координатных осей: $x' = y'',\ y' = x''$;

б) изменение направления координатной оси, например оси абсцисс: $x' = -x'',\ y' = y''$;

в) умножение обеих частей уравнения на отличный от нуля множитель;

г) перенос членов из одной части уравнения в другую.

В результате этих преобразований уравнение приводится к каноническому виду. Замену неизвестных, приводящую уравнение поверхности к каноническому виду, определяем как композицию всех замен, применяемых в ходе решения.

Ход выполнения: выполнить задания.

Задание 1. Составить уравнение окружности с центром в заданной точке S и данным радиусом r: S (4; -7), r=5;

Задание 2. Для указанных окружностей определить координаты центра S и радиус r:

а) [redacted]

б) [redacted]

Задание 3. Найти координаты вершин, оси, фокусы и эксцентриситет эллипсов:

а) [redacted];

б) $2x^2 + 3y^2 + 8x - 6y - 25 = 0$

Задание 4. Найти координаты вершин, оси, фокусы, эксцентриситет и уравнения асимптот гиперболы: а) [redacted] б) [redacted]

Форма отчета: устный отчет по решению задач.

Практическое занятие №5

Тема: расчет площадей многогранников различных форм.

Цель: научиться применять формулы для вычисления площадей многогранников различных форм.

Оборудование: раздаточный материал.

Методические указания: изучить теоретический материал.

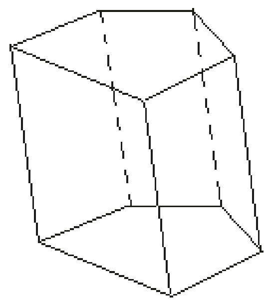
Многогранник – геометрическое тело, ограниченное плоскими многоугольниками. Многоугольники, ограничивающие многогранник, называются **гранями**, их стороны - **рёбрами,** а вершины - **вершинами** многогранника. Отрезки, соединяющие две какие-нибудь вершины, не лежащие на одной грани, называются **диагоналями** многогранника.

Мы будем рассматривать только выпуклые многогранники, т.е. такие, которые расположены по одну сторону от каждой своей грани.

Призмой называется многогранник, у которого две грани - равные многоугольники с соответственно параллельными сторонами, а все остальные грани - параллелограммы.

Многоугольники, лежащие в параллельных плоскостях, называются **основаниями** призмы; перпендикуляр, опущенный из какой-нибудь точки одного основания на другое, называется **высотой** призмы. Параллелограммы называются **боковыми гранями** призмы, а их стороны, соединяющие соответственные вершины оснований, - **боковыми рёбрами**. У призмы все боковые рёбра равны, как отрезки параллельных прямых, заключённые между параллельными плоскостями.

Плоскость, проведённая через какие-нибудь два боковых ребра, не принадлежащих одной грани призмы, называется **диагональной плоскостью**.



Призма, боковые ребра которой перпендикулярны основаниям, называется прямой, в противном случае — наклонной. Прямая призма, у которой в основаниях лежат правильные n-угольники, называется **правильной**.

Параллелепипедом называют призму, у которой основаниями служат параллелограммы.

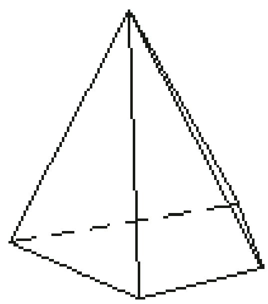
Прямой параллелепипед называется **прямоугольным**, если его основания - прямоугольники.

Три ребра прямоугольного параллелепипеда, сходящиеся в одной вершине, называются его **измерениями.**

Прямоугольный параллелепипед, имеющий равные измерения, называется **кубом.**

Пирамидой называется многогранник, у которого одна грань, называемая основанием, есть какой-нибудь многоугольник, а все остальные грани, называемые боковыми, - треугольники, имеющие общую вершину.

Общая вершина боковых треугольников называется **вершиной** пирамиды, а перпендикуляр, опущенный из вершины на основание, - **её высотой.**



Плоскость, проведённая через вершину пирамиды и какую-нибудь диагональ основания, называется **диагональной плоскостью**.

Пирамиды бывают треугольные, четырёхугольные и т.д., смотря по тому, лежит ли в основании треугольник, четырёхугольник и т.д. Треугольная пирамида называется **тетраэдром**; у такой пирамиды все четыре грани - треугольники.

Пирамида называется **правильной,** если, во-первых, её основание есть правильный многоугольник и, во-вторых, высота проходит через центр этого многоугольника. В правильной пирамиде все боковые рёбра равны между собой. Поэтому все боковые грани правильной пирамиды - равные равнобедренные треугольники. Высота боковой грани правильной пирамиды называется **апофемой.**

Часть пирамиды, заключённая между основанием и секущей плоскостью, параллельной основанию, называется **усечённой пирамидой.** Параллельные многоугольники называются **основаниями,** а расстояние между ними - **высотой.** Усечённая пирамида называется **правильной,** если она составляет часть правильной пирамиды.

Ход выполнения: выполнить задания.

Задание 1.

В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна 8 см, апофема равна 13 см. Найдите площадь полной поверхности.

Задание 2.

В правильной четырёхугольной призме площадь основания 144 см^2, а высота 14 см. Найти диагональ призмы и площадь полной поверхности.

Форма отчета: устный отчет по решению задач.

Практическое занятие №6

Тема: расчет площадей строительных конструкций.

Цель: научиться применять формулы для вычисления площадей строительных конструкций.

Оборудование: раздаточный материал.

Методические указания: изучить теоретический материал.

1. Площадь поверхности многогранника находится как сумма площадей всех его граней.

2. Площадь поверхности призмы равна: $S_{п.п} = S_{бок} + 2S_{осн}$

Площадь боковой поверхности прямой призмы равна произведению периметра основания на высоту: $S_{бок} = Ph$

3. Площадь поверхности цилиндра равна: $S_{бок}= 2\pi rh$, $S_{осн}=\pi r^2$,

$S_{цил\ п.п} = S_{бок} + 2S_{осн}=2\pi rh + 2\pi r^2= 2\pi r(r + h)$,

где r - радиус цилиндра, h -высота цилиндра.

4. Площадь поверхности конуса равна: $S_{бок}= \pi rl$, $S_{осн}=\pi r^2$, $S_{кон\ п.п} = S_{бок} + S_{осн}=\pi rl + \pi r^2= \pi r(r + l)$,

где r - радиус конуса, l - образуюущая конуса.

5. Площадь поверности усеченного конуса: $S_{бок}= \pi l(r_1 + r_2)$, $S_{ус\ кон\ п.п} = S_{бок} + S_{осн1} + S_{осн2}$,

где r - радиус конуса, l - образуюущая конуса.

6. Площадь поверхности пирамиды равна: $S_{пир}= S_{бок} + S_{осн}$

7. Площадь поверхности шара (сферы): $S_{сф}= 4\pi r^2$

Ход выполнения: выполнить задания.

Задание 1. Определите расход кирпича, для кладки колонны, имеющей форму параллелепипеда с размерами $a\times b\times c$ м: а) пустотелый кирпич; б) уплотненный кирпич.

Задание 2. Определить расход кирпича для кладки в один кирпич двух емкостей для песка, если они имеют цилиндрическую форму радиусом основания R м, высотой H м.

Задание 3. Рассчитать необходимое количество кирпича для кладки шарообразного купольного свода радиусом R м, шириной кирпича 0,12м

Задание 4. Вычислить необходимое количество кирпичей, для кладки стены площадью S$м^2$ толщиной:

а) в пол кирпича - 1 кв.м. кладки в 0,5 кирпича (толщина кладки 12 см.);

б) в полтора кирпича - 1 кв.м. кладки в 1,5 кирпича (толщина кладки в 38 см.);

в) в два с половиной кирпича - 1 кв.м. кладки в 2 кирпича (толщина кладки 51 см.).

Задание 5. На строительных площадках песок хранят в штабелях. После приемки влажный песок уложили в штабель конической формы, размеры которого оказались следующими: длина окружности основания L м, длина по откосу a м. Определите объем принимаемого песка, учитывая скидку на влажность воздуха 15 %.

Форма отчета: устный отчет по решению задач.

Практическое занятие №7

Тема: вычисление объёмов многогранников.

Цель: научиться применять формулы для вычисления объемов многогранников и тел вращения.

Оборудование: раздаточный материал.

Методические указания: изучить теоретический материал.

Многогранник	**Площадь боковой поверхности**	**Площадь основания**	**Объем**	**Дополнительно**
Прямоугольный параллелепипед	$S_{бок} = P \times H$	$S_{осн} = a \times b$	$V = a \times b \times c$	диагональ $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$
Куб	$S_{бок} = 4a^2$	$S_{осн} = a^2$(одно основание)	$V = a^3$	$d = a\sqrt{3}$
Правильная Пирамида	$S_{бок} = 0,5P \times H$	площадь треугольника	$V = 1/3 S_{осн} \times H$	
P – периметр основания; H – высота многогранника; a, b - ребра основания, c – боковое ребро				
Тело вращения	**Площадь боковой поверхности**	**Площадь основания**	**Объем**	**Условные обозначения**
Цилиндр	$S_{бок} = 2\pi RH$	$S_{осн} = \pi R^2$ (каждое основание)	$V = \pi R^2 H$	R – радиус основания H - высота
Конус	$S_{бок} = \pi Rl$	$S_{осн} = \pi R^2$	$V = 1/3\pi R^2 H$	l – образующая конуса
Шар	$S_{шара} = 4\pi R^2 = \pi D^2$		$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = 1/6\pi D^3$	

Ход выполнения: выполнить задания.

Задание 1. Три латунных куба с ребрами 3 см, 4 см и 5 см переплавлены в один куб. Какое ребро у этого куба?

Задание 2. Измерения прямоугольного параллелепипеда 15м, 50м и 36м. Найдите ребро равновеликого ему куба.

Задание 3. Требуется установить резервуар для воды емкостью 10 $м^3$ на площадке размером 2,5м х 1,75м, служащей для него дном. Найдите высоту резервуара.

Задание 4. Кирпич размером 25х12х6,5 имеет массу 3,51кг. Найдите его плотность.

Задание 5. Основание прямого параллелепипеда - ромб, площадь которого 1м^2. Площадь диагональных сечений 3м^2 и 6м^2. Найдите объем параллелепипеда.

Задание 6. Диагональ правильной четырехугольной призмы равна 3,5 см, а диагональ боковой грани 2,5 см.

Задание 7. Площадь основания прямой треугольной призмы равна 4см^2, а площади боковых граней - 9 см^2, 10 см^2 и 17 см^2. Найдите объем.

Задание 8. Основание пирамиды - прямоугольник со сторонами 9м и 12м, все боковые ребра равны 12,5м. Найдите объем пирамиды.

Задание 9. Основание пирамиды - равнобедренный треугольник со сторонами 6 см, 6 см и 8 см. Все боковые ребра равны 9 см. Найдите объем пирамиды.

Форма отчета: устный отчет по решению задач.

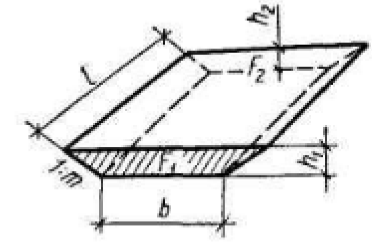
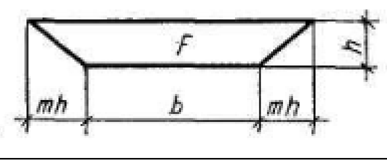
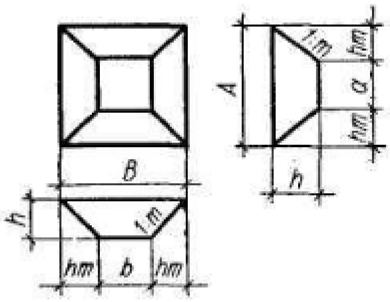
Практическое занятие №8

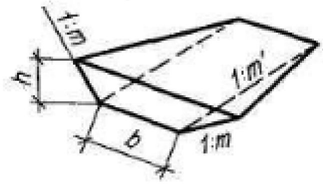
Тема: вычисление объёмов деталей строительных конструкций, определение объема земляных работ.

Цель: научиться применять формулы для вычисления объёмов деталей строительных конструкций, определение объема земляных работ.

Оборудование: раздаточный материал.

Методические указания: изучить теоретический материал.

Элементы	Схема	Расчетная формула
Участок котлована между параллельными сечениями		$V=\left[\frac{F_1+F_2}{2}-\frac{m(h_1-h_2)^2}{6}\right]l$
Площадь сечения		$F=(b+mh)h$ *Для прямоугольного сечения* $F=bh$
Одиночные выемки		$V=\frac{h}{6}\left[(2A+a)B+(2a+A)b\right]$ *При* $A=B$ *и* $a=b$ $V=\frac{h}{3}\left[(a+A)^2-aA\right]$

Въездная траншея		$V = m'\left(\frac{bh^2}{2} + \frac{h^3 m}{3}\right)$

Ход выполнения: выполнить задания.

Задание 1. Вырыли котлован в виде усеченной пирамиды, стороны оснований которой равны радиус 20м и 40м, глубиной 5 м. Найти объём вынутого грунта.

Задание 2. Для приготовления раствора заливки фундамента привезли 92м^3 цемента, 60м^3 мелкого заполнителя и 80 м^3 крупного заполнителя, распределили равными кучками в виде конуса высотой 3м и радиусом 2м. Определить количество кучек нужных для приготовления раствора.

Задание 3. Нужно рассчитать сколько понадобится готовой цементной смеси на погреб состоящий из четырех стен длиной 4 м, высотой 3 м и толщиной 30 см.

Задание 4. В цилиндрический сосуд налили 3 000 см^3 воды. Уровень воды при этом достиг высоты 20 см. В жидкость полностью нагрузили деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся на 3 см. Чему равен объём детали.

Задание 5. Найдите объём воды в бассейне, если его длина 10м, ширина 6м, уровень воды – 2м.

Задание 6. Деталь имеет форму усеченного конуса, с радиусом меньшего основания 15см и высотой 10 см. Стороны меньшего основания относятся как 1:2. Найдите объём детали.

Форма отчета: устный отчет по решению задач.

Практическое занятие №9

Тема: вычисление пределов последовательностей и функций с применением различных методов. Исследование функции на непрерывность, определение точек разрыва.

Цель: отработка умений и навыков вычисления пределов, раскрытия неопределенностей, применения замечательных пределов.

Оборудование: раздаточный материал.

Методические указания: изучить теоретический материал.

При вычислении пределов функций в какой-либо точке в результате упрощения получаются выражения, не несущие какой-либо информации об этой функции. Такие выражения носят название **неопределенностей.**

Виды неопределенностей:

- неопределённость вида $\frac{0}{0}$;
- неопределённость вида $\frac{\infty}{\infty}$.

Пример 1. Вычислите предел $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^2-3x-5}{x+1}$.

Решение:
Подставить единицу в функцию, стоящую под знаком предела:
$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-3x-5}{x+1}=\frac{2\cdot 1^2-3\cdot 1-5}{1+1}=\frac{-6}{2}=-3$$
Правило: Когда дан любой предел, сначала просто пытаемся подставить число в функцию.

Пример 2. Вычислите предел $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2-2x-3)$.
Решение:
Грубо говоря, согласно нашему первому правилу, мы вместо «икса» подставляем в функцию бесконечность и получаем ответ.
$$\lim_{x\to\infty}(x^2-2x-3)=\infty.$$

Пример 3. Вычислите предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-3x-5}{1+x+3x^2}$.
Решение:
Вместо «икса» подставляем в функцию бесконечность и получаем ответ так называемую **неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$.**
$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-5}{1+x+3x^2}=\frac{\infty}{\infty}=(*)$$
Правило: для того, чтобы раскрыть неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$ необходимо разделить числитель и знаменатель на*x* в старшей степени.

Сначала мы смотрим на числитель и находим *x* в старшей степени:
$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-5}{1+x+3x^2}$$
Старшая степень в числителе равна двум.
Теперь смотрим на знаменатель и тоже находим *x* в старшей степени:
$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-5}{1+x+3x^2}$$
Старшая степень знаменателя равна двум.
Затем мы выбираем самую старшую степень числителя и знаменателя: в данном примере они совпадают и равны двойке.

Разделим числитель и знаменатель на x^2
$$(*)=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{2x^2-3x-5}{x^2}}{\dfrac{1+x+3x^2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{2x^2}{x^2}-\dfrac{3x}{x^2}-\dfrac{5}{x^2}}{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{x}{x^2}+\dfrac{3x^2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\overset{\to 0}{\dfrac{3}{x}}-\overset{\to 0}{\dfrac{5}{x^2}}}{\overset{\to 0}{\dfrac{1}{x^2}}+\overset{\to 0}{\dfrac{1}{x}}+3}=\frac{2}{3}$$
Пример 4. Решить предел
$$\lim_{x\to -1}\frac{2x^2-3x-5}{x+1}$$

Сначала попробуем подставить -1 в дробь: $\frac{2(-1)^2 - 3\cdot(-1) - 5}{-1+1} = \frac{0}{0}$

В данном случае получена так называемая **неопределенность** $\frac{0}{0}$ **.**

Правило: если в числителе и знаменателе находятся многочлены, и имеется неопределенности вида $\frac{0}{0}$, то для ее раскрытия нужно разложить числитель и знаменатель на множители.

Для этого чаще всего нужно решить квадратное уравнение и (или) использовать формулы сокращенного умножения. Итак, решаем наш предел $\lim\limits_{x\to -1}\frac{2x^2-3x-5}{x+1} = \frac{0}{0} = (*)$

Разложим числитель и знаменатель на множители. Для того чтобы разложить числитель на множители, нужно решить квадратное уравнение:

$2x^2 - 3x - 5 = 0$

Сначала находим дискриминант:

$D = (-3)^2 - 4\cdot 2\cdot(-5) = 9 + 40 = 49$

И квадратный корень из него: $\sqrt{D} = \sqrt{49} = 7$.

В случае если дискриминант большой, например 361, используем калькулятор, функция извлечения квадратного корня есть на самом простом калькуляторе.

Далее находим корни:

$$x_1 = \frac{-(-3)-7}{2\cdot 2} = \frac{3-7}{4} = \frac{-4}{4} = -1$$

$$x_2 = \frac{-(-3)+7}{2\cdot 2} = \frac{3+7}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

Таким образом:

$$2x^2 - 3x - 5 = 2(x-(-1))\cdot\left(x-\frac{5}{2}\right) = 2(x+1)\cdot\left(x-\frac{5}{2}\right) = (x+1)\cdot(2x-5)$$

- ччислитель на множители разложен.

Знаменатель $x+1$ уже является простейшим множителем, и упростить его никак нельзя.

$$(*) = \lim_{x\to -1}\frac{(x+1)\cdot(2x-5)}{x+1} = (*)$$

Очевидно, что можно сократить на (x+1):

$$(*) = \lim_{x\to -1}(2x-5) = (*)$$

Теперь и подставляем -1 в выражение, которое осталось под знаком предела:

$= 2\cdot(-1) - 5 = -2 - 5 = -7$

Ход выполнения:

Задание 1. Вычислите пределы:

a) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2+7x+10}{x^2-x-6}$,
где $x_0=-1,\ x_0=-2$

b) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2+10x+25}{x^2+3x-10}$,
где $x_0=3,\ x_0=-5$

c) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{3x^2-7x+2}{2x^2-5x+2}$,
где $x_0=-1,\ x_0=3$

d) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{2x^2-5x-3}{-15-4x+3x^2}$,
где $x_0=1,\ x_0=3$

e) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{2x^2+x-1}{5x^2+4x-1}$,
где $x_0=3,\ x_0=-1$

f) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{4x^2+7x+3}{2x^2+x-1}$,
где $x_0=1,\ x_0=-1$

g) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2-2x+1}{2x^2-x-1}$,
где $x_0=3,\ x_0=1$

h) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{2x^2-9x+9}{x^2-5x+6}$,
где $x_0=-2,\ x_0=3$

i) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{2x^2-5x-3}{x^2-4x+3}$,
где $x_0=-1,\ x_0=3$

j) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2-3x+2}{14-x-3x^2}$,
где $x_0=1,\ x_0=2$

Форма отчета: устный отчет по решению задач.

Практическое занятие №10

Тема: составление уравнения касательной и нормали. Определение экстремумов функции. Вычисление наибольшего и наименьшего значений функции на заданном отрезке.

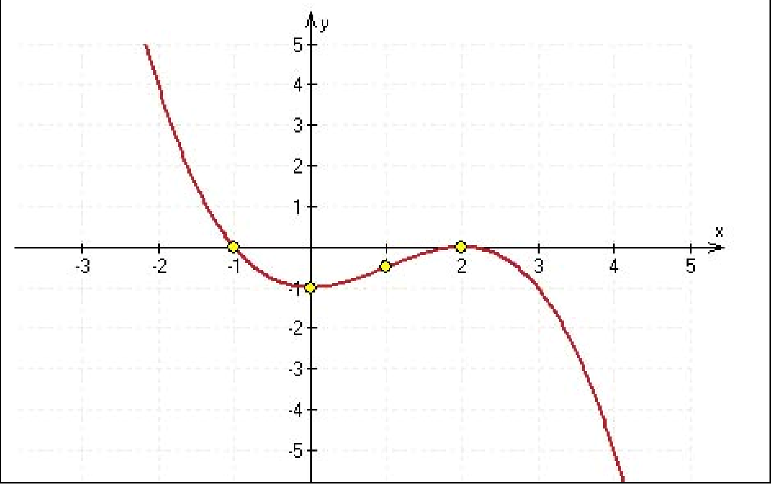
Цель: отработка умений и навыков исследования функции средствами дифференциального исчисления и определения наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке.

Оборудование: раздаточный материал.

Методические указания: изучить теоретический материал.

Пример №1. Исследовать функцию средствами дифференциального исчисления и построить ее график $\boldsymbol{y=\dfrac{-1}{4}(x^3-3x^2+4)}$.

План исследования функции	
Область определения функции (множество возможных значений переменной x)	D(y)=(-∞;+∞)
Координаты точки пересечения с осью Oy	$y(0)=\frac{-1}{4}(0^3-3\times0^2+4)=-1$ Точка пересечения с осью Oy : (0;-1)
Исследование функции на монотонность	$y^{/}=\frac{-1}{4}(3x^2-6x)$ $\frac{-3}{4}x^2+\frac{3}{2}x=0$ $x\left(\frac{-3}{4}x+\frac{3}{2}\right)=0$ X=0 или $\frac{-3}{4}x+\frac{3}{2}=0$ $\frac{-3}{4}$x=$\frac{-3}{2}$; x=2 (-∞;0)U(2;+∞) – функция убывает (0;2) – функция возрастает
Определение точек экстремума функции	$y(0)=\frac{-1}{4}(0^3-3\times0^2+4)=-1$ (0;-1) – точка минимума $y(2)=\frac{-1}{4}(2^3-3\times2^2+4)=0$ (2;0) – точка максимума
Исследование функции на выпуклость и вогнутость	$y''=\frac{-3}{4}\times2x+\frac{3}{2}=0$ y''=$\frac{-3}{2}$x+$\frac{3}{2}$ = 0; x=1
Определение точек перегиба функции	$y(1)=\frac{-1}{4}(1^3-3\times1^2+4)=-0{,}5$ (1;-0,5) – точка перегиба
Определение координат дополнительных точек	$y(-1)=\frac{-1}{4}((-1)^3-3\times(-1)^2+4)=0$; (-1;0) $y(3)=\frac{-1}{4}(3^3-3\times3^2+4)=-1$; (3;-1)

Построение графика	

Пример №2. Найти наибольшее и наименьшее значения функций $y = f(x)$ на заданном отрезке.

$\boldsymbol{y = \frac{x}{x-1}}$, $[2,4]$.

Решение:

1) Находим производную заданной функции:

$$\left(\frac{x}{x-1}\right)' = \frac{x' \times (x-1) - (x-1)' \times x}{(x-1)^2} = \frac{x-1-x}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x-1)^2}$$

2) Решаем уравнение $y'(x) = 0$:

$$\frac{-1}{(x-1)^2} = 0$$

Данное уравнение корней не имеет, так как числитель не может быть равен нулю.

3) Находим значение функции на границах интервала:

$$y(2) = \frac{2}{2-1} = 2$$

$$y(4) = \frac{4}{4-1} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$$

Следовательно, $y_{наиб} = 2$, $y_{наим} = 1\frac{1}{3}$.

Пример №2. Найти наибольшее и наименьшее значения функций $y = f(x)$ на заданном отрезке.

$\boldsymbol{y = \frac{-1}{4}(x^3 - 3x^2 + 4), [1,4].}$

Решение:

1) Находим производную заданной функции:

$$y' = \frac{-1}{4}(3x^2 - 6x)$$

2) Решаем уравнение $y'(x) = 0$:

$$\frac{-3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x = 0$$

$$x\left(\frac{-3}{4}x + \frac{3}{2}\right) = 0$$

$$X=0 \text{ или } \frac{-3}{4}x+\frac{3}{2}=0$$

$\frac{-3}{4}x=\frac{-3}{2}$;

x=2

3) Так как найденное значение принадлежит заданному отрезку, то находим значения функции на границах отрезка и в найденной точке:

$y(2)=\frac{-1}{4}(2^3-3\times 2^2+4)=0$

$y(1)=\frac{-1}{4}(1^3-3\times 1^2+4)=-0.5$

$y(4)=\frac{-1}{4}(4^3-3\times 4^2+4)=-5$

Следовательно, $y_{наиб}=0, y_{наим}=-5.$

Ход выполнения: выполнить задания.

Задание 1. Исследовать средствами дифференциального исчисления функцию $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 16$ и построить ее график.

Задание 2. Найти наибольшее и наименьшее значения функций $y=2x^3-3x^2-12x+1$ на заданном отрезке $[-2;4]$.

Форма отчета: устный отчет по решению задач.

Практическое занятие №11

Тема: применение производной к исследованию функции и для нахождения наилучшего решения в прикладных задачах.

Цель: формирование умений исследовать функции при помощи производной, применять производную при решении задач на максимум и минимум.

Оборудование: раздаточный материал.

Методические указания: изучить теоретический материал.

Общая схема построения графиков функций:

1. Найти область определения функции.
2. Выяснить, не является ли функция четной, нечетной или периодической.
3. Найти точки пересечения графика с осями координат (если это не вызывает затруднений).
4. Найти асимптоты графика функции.
5. Найти промежутки монотонности функции и ее экстремумы.
6. Найти промежутки выпуклости графика функции и точки перегиба.
7. Построить график, используя полученные результаты исследования.

Пример: построить график функции y=x^3-6*x^2+9*x.

1. Функция определена на всей числовой прямой, т.е. $D(y)=R$.
2. Данная функция не является ни четной, ни нечетной; кроме того, она не является периодической.
3. Найдем точку пересечения графика с осью Oy : полагая $x=0$, получим $y=-3$. Точки пересечения графика с осью Ox в данном случае найти затруднительно.

4. Очевидно, что график функции не имеет асимптот.
5. Найдем производную: $y'=3x^2-12x+9$.

   Точки $x=1$ и $x=3$ делят область определения функции на три промежутка: $-\infty<x<1$, $1<x<3$, $3<x<\infty$.

   В промежутках $-\infty<x<1$ и $3<x<\infty$ $y'>0$, то есть функция возрастает, а в промежутке $1<x<3$ $y'<0$, то есть функция убывает. При переходе через точку $x=1$ производная меняет знак с плюса на минус, а при переходе через точку $x=3$ - с минуса на плюс.
6. Найдем вторую производную: y=6x-12. Точка $x=2$ делит область определения функции на два промежутка $-\infty<x<2$ и $2<x<\infty$. В первом из них $y''<0$, а во втором $y''>0$, то есть в промежутке $-\infty<x<2$ кривая выпукла вверх, а в промежутке $2<x<\infty$ выпукла вниз. Таким образом, получим точку перегиба (2;-1).
7. Используя полученные данные, строим искомый график.

Ход выполнения: выполнить задания.

Задание. Исследовать функцию $y = x^3-3x^2$ и построить график функции.

Форма отчета: устный отчет по решению задач.

Практическое занятие №12

Тема: вычисление неопределённых интегралов методом замены переменных.

Цель: совершенствование умений находить неопределенные интегралы методом замены переменной.

Оборудование: раздаточный материал.

Методические указания: изучить теоретический материал.

В основе интегрирования методом замены переменной лежит свойство инвариантности формул интегрирования, которое заключается в следующем: если $\int f(x)dx=F(x)+C$, то $\int f(u)dx=F(u)+C$, где u(x) – произвольная дифференцируемая функция от x.

Замена переменной в неопределенном интеграле производится с помощью подстановок.

Ход выполнения: выполнить задания.

Задание. Вычислить интегралы.

1) $\int \frac{dx}{(x+4)\cdot\sqrt{x}}$ $\quad \left| t=\sqrt{x} \right| = arctg\frac{\sqrt{x}}{2}+C$

2) $\int \frac{dx}{x\cdot\sqrt{2x-9}}$ $\quad \left| t=\sqrt{2x-9} \right| = \frac{2}{3}arctg\frac{\sqrt{2x-9}}{3}+C$

3) $\int \frac{e^{\sqrt{2x-1}}}{\sqrt{2x-1}}dx$ $\quad \left| t=\sqrt{2x-1} \right| = e^{\sqrt{2x-1}}+C$

4) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-4}}$ $\quad \left| t=\sqrt{e^x-4} \right| = arctg\frac{\sqrt{e^x-4}}{2}+C$

5) $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{3-\cos^4 x}}dx \qquad \left| t=\cos^2 x \right| = -\arcsin \frac{\cos^2 x}{\sqrt{3}} + C$

Форма отчета: устный отчет по решению задач.

Практическое занятие №13

Тема: вычисление неопределённых интегралов с помощью интегрирования по частям.

Цель: совершенствование умений находить неопределенные интегралы методом интегрирования по частям.

Оборудование: раздаточный материал.

Методические указания: изучить теоретический материал.

Интегрированием по частям называется нахождение интеграла по формуле $\int udv = uv - \int vdu$, (1)

где u и v - непрерывно дифференцируемые функции от x. С помощью формулы (1) отыскание интеграла $\int udv$ сводится к нахождению другого интеграла $\int vdu$, её применение целесообразно в тех случаях, когда последний интеграл либо проще исходного, либо ему подобен.

При этом в качестве u берется функция, которая при дифференцировании упрощается, а в качестве dv - та часть подынтегрального выражения, интеграл от которой известен или может быть найден.

Так при нахождении интегралов вида

за u следует принять многочлен $P(x)$, а за dv - соответственно выражения $e^{ax}dx$, $\sin axdx, \cos axdx$; при отыскании интегралов вида

за u принимаются соответственно функции $\ln x, \arcsin x, \arccos x$, а за dv - выражение $P(x)dx$.

Ход выполнения: выполнить задания.

Задание. Вычислить интегралы.

1. $\int x^3 \cdot arcctgxdx$
2. $\int (x^2+1)\cdot e^{2x}dx$
3. $\int (2x^2 - x + 1)\cdot \sin 4xdx$
4. $\int \ln xdx$
5. $\int \ln^2(2x+3)dx$
6. $\int e^{2x}\cdot \sin xdx$

7. $\int \cos(\ln x)dx$

8. $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{x+1}}dx$

Форма отчета: устный отчет по решению задач.

Практическое занятие №14

Тема: вычисление определенных интегралов.
Цель: научиться вычислять определенные интегралы.
Оборудование: раздаточный материал.
Методические указания: изучить теоретический материал.

Непосредственное интегрирование предполагает использование основных свойств определенного интеграла и формулы Ньютона – Лейбница.

Метод подстановки сводит определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ с помощью подстановки $u=\varphi(x)$ к определенному интегралу относительно новой переменной и. При этом старые пределы интегрирования а и b заменяются соответственно новыми пределами интегрирования a_1 и b_1, которые находятся из исходной подстановки: $a_1=\varphi(a),\quad b_1=\varphi(b)$.

Пример 1: Вычислить $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{3dx}{\cos^2 x}$ **.**

Решение**:**

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{3dx}{\cos^2 x} = 3\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} = 3tgx\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 3\left(tg\left(\frac{\pi}{4}\right)-tg0\right) = 3$$

Пример 2: Вычислить $\int_0^{\pi}(2e^{2x}+3\cos x)dx$

Решение:

$$\int_0^{\pi}(2e^{2x}+3\cos x)dx = 2\int_0^{\pi}e^{2x}dx + 3\int_0^{\pi}\cos xdx = (e^{2x}+3\sin x)\Big|_0^{\pi} = (e^{2\pi}+3\sin\pi)-(e^0+3\sin 0) =$$
$$= e^{2\pi}-1 \approx 534{,}492$$

Пример 3. Вычислить $\int_1^8\left(4x-\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right)dx$

$$\int_1^8\left(4x-\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right)\cdot dx = 4\int_1^8 xdx - \frac{1}{3}\int_1^8 x^{-2/3}dx = 2x^2\Big|_1^8 - \sqrt[3]{x}\Big|_1^8 =$$

Решение: $= 2(8^2-1)-(\sqrt[3]{8}-1) = 2\cdot 63 - 1 = 125$

Пример 4. Вычислить $\int_0^1 (e^x - 1)^4 e^x dx$

Решение:

$$\int_0^1 (e^x - 1)^4 e^x dx = \left| \begin{array}{l} e^x - 1 = t \\ d(e^x - 1) = dt \\ e^x dx = dt \\ a' = e^0 - 1 = 0 \\ b' = e^1 - 1 = e - 1 \end{array} \right| = \int_0^{e-1} t^4 dt = \frac{t^5}{5}\Big|_0^{e-1} = \frac{(e-1)^5}{5} - \frac{0^5}{5} = \frac{1}{5}(e-1)^5$$

Пример 5. Вычислить $\int_0^2 x^2\sqrt{4 - x^2}\,dx$.

Решение: Положим $x = 2\sin t$. Тогда $dx = 2\cos t\,dt$. Если $x = 0,\ mo\ \ t = 0$, если $x = 2,\ mo\ \ t = \frac{\pi}{2}$. Поэтому

$$\int_0^2 x^2\sqrt{4 - x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\sin^2 t\sqrt{4 - 4\sin^2 t}\ 2\cos t\ dt = 16\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\cos^2 t dt = 16\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4}\sin^2 2t\ dt =$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(1 - \cos 4t)dt = 2(t - \frac{1}{4}\sin 4t)\ \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}\sin(4\cdot\frac{\pi}{2})) - 0 = \pi$$

Ход выполнения: выполнить задания.

Задание. Вычислить интегралы.

1. [redacted]
2. [redacted]
3. [redacted]
4. [redacted]
5. [redacted]
6. [redacted]
7. [redacted]

8. [redacted]

Форма отчета: устный отчет по решению задач.

Практическое занятие №15

Тема: построение криволинейной трапеции. Применение определенного интеграла к вычислению площадей плоских фигур и вычислению объёмов.

Цель: отработка умений и навыков применения определенного интеграла для вычисления площадей плоских фигур.

Оборудование: раздаточный материал.

Методические указания: изучить теоретический материал.

Пример. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$y = x + 2$ и $y = -x^2 + 4x + 12$

Решение:

Графиком y=x+2 является прямая линия, а графиком линии $y = -x^2 + 4x + 12$

является парабола, ветви которой направлены вниз.

1. Чтобы построить график прямой необходимо задать две точки.
2. Построение параболы начинается с нахождения координат ее вершины:

$x_в = \frac{-b}{2a}$; $\qquad x_в = \frac{-4}{2\times(-1)} = 2$

$y_в = y(x_в)$; $\qquad y_в = -2^2 + 4 \times 2 + 12 = 16$

Следовательно, координаты вершины параболы (2;16).

Далее найдем точку пересечения с осью Oy:

$y(0) = -0^2 + 4 \times 0 + 12 = 12 \rightarrow (0;12)$

Далее найдем точки пересечения с осью Ox, решив уравнение:

$-x^2 + 4x + 12 = 0$

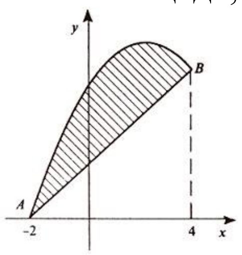
$x^2 - 4x - 12 = 0$

D=64

$$x_1 = \frac{-4 + \sqrt{64}}{-2} = -2$$

$$x_2 = \frac{-4 - \sqrt{64}}{-2} = 6$$

3. В одной системе координат строим оба графика и отмечаем штриховкой площадь, которую надо найти:



4. Находим точки пересечения заданных линий. Для этого решаем систему уравнений:

$$\begin{cases} y = x + 2 \\ y = -x^2 + 4x + 12 \end{cases}$$

Для нахождения абсцисс точек пересечения заданных линий решаем уравнение:

$x + 2 = -x^2 + 4x + 12$ или $x^2 - 3x - 10 = 0$

Решив квадратное уравнение, находим: $x_1 = -2$, $x_2 = 5$.

Итак, данные линии, представляющие собой параболу и прямую, пересекаются в точках *с абсциссами* $x_1 = -2$, $x_2 = 5$.

5. Эти линии образуют замкнутую фигуру, площадь которой вычисляем по указанной выше формуле:

$$S = \int_{-2}^{5} (-x^2 + 4x + 12 - x - 2)dx = \int_{-2}^{5} (-x^2 + 3x + 10)dx$$

$$= \left(-\frac{5^3}{3} + 3 \times \frac{5^2}{2} + 10 \times 5\right) - \left(\frac{(-2)^3}{3} + 3 \times \frac{(-2)^2}{2} + 10 \times (-2)\right) = 60 ед^2$$

Ход выполнения: выполнить задания.

Задание. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y = -x^2 + 4x - 1$ и прямой $y = -x - 1$. Сделать чертеж.

Форма отчета: устный отчет по решению задач.

Практическое занятие №16

Тема: вычисление вероятностей сложных событий. Теоремы сложения и умножения вероятностей. Формула полной вероятности и формула Бернулли.

Цель: отработка умений и навыков решения различных задач по теории вероятности.

Оборудование: раздаточный материал.

Методические указания: изучить теоретический материал.

Основные теоретические сведения и примеры решения задач

1. В урне Н билетов. Из них М выигрышных. Какова вероятность того, что первый вытянутый билет окажется выигрышным?

Решение:

Пусть А – событие, означающее, что первый вытянутый билет выигрышный.

Н – общее количество всех возможных исходов.

М – количество исходов, благоприятствующих наступлению события А.

Р(А) – вероятность наступления события А. Тогда Р(А)=М/Н.

2. Биатлонист стреляет по мишени. Мишень – круг радиуса R см. Биатлонист попадает в мишень с вероятностью 1. Попадание в любую точку равновероятно. Необходимо попасть в круг радиуса r см.

Решение:

А - попадание в круг радиуса r см. $S_r=\pi r^2$. $S_R=\pi R^2$. $P(A)=S_r/S_R$

3. Имеется собрание сочинений из Н томов некоего автора. Все Н томов расставляются на книжной полке случайным образом. Какова вероятность, что тома расположатся в порядке возрастания или убывания?

Решение:

А – вероятность того, что тома расположатся в порядке возрастания или убывания.

Все тома можно расставить на полке m=Н! способами. Только в двух случаях тома расположатся либо в порядке возрастания, либо в порядке убывания. Значит, n=2. Тогда P(A)=n/Н!.

4. Имеется собрание сочинений из Н томов некоего автора. На полке умещается только М томов (М меньше Н). Эти тома берут из Н случайным способом. Какова вероятность, что выбранные М томов расположатся в порядке возрастания или убывания?

Решение:

А – вероятность того, что выбранные тома расположатся в порядке возрастания или убывания.

М томов из Н томов можно выбрать C_H^M способами. Только в двух случаях тома расположатся либо в порядке возрастания, либо в порядке убывания. Значит, n=2. Тогда P(A)=2/C_H^M.

5. Три стрелка стреляют по мишени. Предполагается ,что события попадания в мишень для стрелков независимы и вероятности попадания стрелков в мишень равны p1, p2, p3. Какова вероятность того, что:

1) все три выстрела окажутся успешными;

2) хотя бы одни выстрел окажется успешным;

3) точно один выстрел окажется успешным, два выстрела окажутся успешными?

Решение:

1) А – все три выстрела окажутся успешными

P(A)=p1*p2*p3

2) Н - хотя бы одни выстрел окажется успешным 1-p_i – вероятность промаха каждого стрелка

P(H) =1-(1-p1)(1-p2)(1-p3)

3) В – только один выстрел окажется успешным

P(B)=p1*(1-p2)*(1-p3)+(1-p1)*p2*(1-p3)+(1-p1)*(1-p2)*p3

С - два выстрела окажутся успешными

P(c)=p1*p2*(1-p3)+(1-p1)*p2*p3+p1*(1-p2)*p3

6. Футболист бьет Н раз пенальти. Вероятность забить при одном ударе равна p. Какова вероятность, что будет забито 3 пенальти?

Решение:

Пусть А – событие, означающее, что будет забито 3 пенальти. Так вероятность забить при одном пенальти постоянна, то воспользуемся формулой Бернулли.

Тогда P(A)=$C_H^3 \times p^3 \times (1-p)^{H-3}$

7. Случайная величина X задана рядом распределения:

X_i	*-3*	*0*	*1*	*4*
P_i	P1	P2	P3	P4

Найти математическое ожидание МХ, дисперсию DX и среднеквадратическое отклонение σ.

Решение:

МХ=x1p1+x2p2+x3p3+x4p4

DX=$x1^2p1 + x2^2p2 + x3^2p3 + x4^2p4 - (MX)^2$

$\sigma = \sqrt{DX}$.

Ход выполнения: выполнить задания.

Задание. формулировки задач смотри в примерах решения задач.

1		**2**		**3**	**4**		**5**			**6**		**7**			
Н	М	R	r	Н	Н	М	Р1	Р2	Р3	Н	р	Р1	Р2	Р3	Р4
10	1	5	1	3	5	3	0,1	0,2	0,3	5	0,1	0,1	0,2	0,3	0,4

Форма отчета: устный отчет по решению задач.

Практическое занятие №17

Тема: составление статистического распределения выборки. построение полигона и гистограммы.

Цель: научиться составлять статистическое распределения выборки.

Оборудование: раздаточный материал.

Методические указания: изучить теоретический материал.

Для обработки результатов анализа с помощью методов математической статистики необходимо:

- расположить результаты измерений в порядке возрастания;
- проверить, нет ли среди результатов определений грубых погрешностей (промахов) по Q–критерию или другим способом;
- исключить из результатов измерений грубые погрешности;
- заполнить таблицу:

№ п/п	x_i	$\bar{x}$	$\lvert x_i - \bar{x} \rvert$	$(x_i - \bar{x})^2$	$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$
1					
2					
…					
n					

- оценить воспроизводимость результатов измерений по S, $S_{\bar{x}}$ или S_r;
- определить доверительные границы $\bar{x}$, приняв Р=0,95;
- проверить правильность результатов;
- если анализ проводился в разных лабораториях, разными аналитиками необходимо проверить воспроизводимость результатов по критерию Фишера или по *t*-критерию.

Пример 1. Молярная концентрация ионов меди в растворе равна $1 \cdot 10^{-7}$ моль/дм^3. Каким из физико-химических методов анализа – инверсионной вольтамперометрией, фотоколориметрией или кондуктометрией – можно установить его точную концентрацию?

Решение. Для решения этой задачи используем справочные данные по пределу обнаружения в указанных методах (табл. 4). Чтобы с достаточной точностью определить количественное содержание компонента необходимо, чтобы концентрация его в растворе была выше предела обнаружения данным методом ($C_{мин}$) не менее чем в 10–15 раз. В данной задаче C_x равно $1\cdot10^{-7}$ моль/дм^3, что ниже предела обнаружения в фотоколориметрии и кондуктометрии.

Таблица: предел обнаружения в некоторых инструментальных методах анализа

Метод	**Предел обнаруже-ния, моль/дм3**	**Метод**	**Предел обнаруже-ния, моль/дм3**
Флуориметрия	10-8	Спектрофотометрия, в т.ч.	10-6
Классическая		фотоколориметрия	
полярография	10-5	Кондуктометрия, в т.ч.	
Инверсионная		высокочастотное титрование	10-4
вольтамперо-метрия		Потенциометрия	
Атомно-	10-10	Амперометрическое	
абсорбцион-ный		титрование	10-5–10-6
анализ		Рефрактометрия	10-8–10-9
Кулонометрия	10-6–10-7		
	10-9		1%

Можно использовать инверсионную вольтамперометрию, так как $C_x > C_{мин}$ в 100 раз.

Пример 2. При определении содержания хлорид-ионов в минеральной воде методом потенциометрии были получены следующие результаты (мг/дм^3): 650,2; 660,8; 654,2; 649,8; 650,1; 649,9; 630,8. Рассчитайте среднее содержание хлорид-ионов в воде, интервальные значения измеряемой величины.

Решение. Прежде чем рассчитывать среднее содержание хлорид-ионов, следует проверить наличие грубых погрешностей. Для этого можно использовать Q-критерий. Расположим полученные результаты измерений в порядке возрастания их величины и для каждого рассчитаем экспериментальный Q-критерий; например:

$$Q = \frac{C_2 - C_1}{C_7 - C_1} = \frac{19}{30} = 0{,}63\cdot$$

С, мг/дм3	630,8	649,8	649,9	650,1	650,2	654,2	660,8
Qэксп		0,63	0,003	0,007	0,003	0,13	0,22

Полученные значения сравниваем с табличным значениям Q для P = 0,95 и $f = n - 1 = 7 - 1 = 6$; $Q_{табл}$=0,56.

Так как $Q_{эксп1} > Q_{табл}$ результат 630,8 следует признать недостоверным и исключить из дальнейших расчетов.

Среднее содержание хлоридов в минеральной воде рассчитываем из шести оставшихся результатов:

$$\overline{C}\left(Cl^{-}\right) = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} C_i\left(Cl^{-}\right)}{n} = \frac{649{,}8+649{,}9+650{,}1+650{,}2+654{,}2+660{,}8}{6} = 652{,}5\text{Р}$$

ассчитываем стандартное отклонение:

$$S = \sqrt{\frac{\sum\left[\overline{C}\left(Cl^{-}\right) - C_i\left(Cl^{-}\right)\right]^2}{n-1}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(652{,}5-649{,}8)^2+(652{,}5-649{,}9)^2+\ldots+(652{,}5-660{,}8)^2}{6-1}} = 4{,}5.$$

Доверительный интервал рассчитываем по уравнению: $\varepsilon = t(P,\ f)\dfrac{S}{n}$. Для P = 0,95 и $f = n - 1 = 6$: $t\ (P, f) = 2{,}57$.

$$\varepsilon = \frac{2{,}57 \cdot 4{,}5}{\sqrt{6}} = 4{,}7 \text{ мг/дм}^3.$$

Следовательно, содержание хлоридов в минеральной воде равно:

$$C\left(Cl^{-}\right) = \overline{C}\left(Cl^{-}\right) \pm \varepsilon = 652{,}5 \pm 4{,}7 \text{ мг/дм}^3.$$

Пример 3. Определить по критерию Фишера и *t*-критерию существует ли значимое различие между данными определения содержания ионов магния в яблочном соке методом кондуктометрического и фотоэлектрического титрования:

Номер опыта	1	2	3	4	5	6
C1(Mg2+), ммоль/дм3	2,05	2,20	2,13	2,21	2,15	2,31
C2(Mg2+), ммоль/дм3	2,09	2,18	2,13	2,11	2,20	2,19

Решение. По данным задачи число определений в каждом случае равно n_1=6; n_2=6. Для расчета критерия Фишера необходимо знать численное значение среднего результата определений $\overline{x}_1$ и $\overline{x}_2$ и дисперсии $S^2{}_1$ и $S^2{}_2$. Средний результат определений рассчитываем по формуле (1):

$$\overline{x}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n_1} = \frac{2{,}05+2{,}20+2{,}13+2{,}21+2{,}15+2{,}31}{6} = 2{,}18;$$

$$\overline{x}_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n_2} = \frac{2{,}09+2{,}18+2{,}13+2{,}11+2{,}20+2{,}19}{6} = 2{,}15.$$

Дисперсии рассчитывают по формуле (2):

$$S_1^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2}{n-1} = \frac{(2{,}18-2{,}05)^2+(2{,}18-2{,}13)^2+(2{,}18-2{,}20)^2}{6-1} +$$

$$+ \frac{(2{,}18-2{,}21)^2+(2{,}18-2{,}15)^2+(2{,}18-2{,}31)^2}{6-1} = 7{,}70 \cdot 10^{-3}.$$

Аналогично вычисляем $S_2{}^2$; $S_2{}^2 = 2{,}65 \cdot 10^{-3}$.

Рассчитываем экспериментальный критерий Фишера:

$$F_{\text{эксп}} = \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{7{,}70 \cdot 10^{-3}}{2{,}65 \cdot 10^{-3}} = 2{,}64,$$

где S_1 – бóльшая по величине дисперсия.

Сравниваем $F_{\text{эксп}}$ с $F_{\text{табл}}$; $F_{\text{табл}}$ для P=0,95 и $f_1 = n_1 - 1 = 6 - 1 = 5$ и $f_2 = n_2 - 1 = 5$ равно 5.1.

Так как $F_{\text{эксп}} < F_{\text{табл}}$ различие не является значимым. Рассчитаем, есть ли статистически значимое различие в средних результатах кондуктометрического и фотоэлектрического титрования. Рассчитываем средневзвешенное стандартное отклонение:

$$S = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}} = \sqrt{\frac{5 \cdot 2{,}65 \cdot 10^{-3} + 5 \cdot 7{,}7 \cdot 10^{-3}}{6 + 6 - 2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{51{,}75 \cdot 10^{-3}}{10}} = 0{,}072.$$

Рассчитываем коэффициент Стьюдента или t-критерий:

$$t_{\text{эксп.}} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{S}\sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}} = \frac{2{,}18 - 2{,}15}{0{,}072}\sqrt{\frac{6 \cdot 6}{6 + 6}} = 0{,}72 \cdot$$

Сравниваем полученное значение с табличным значением коэффициента Стьюдента для P=0,95 и числа степеней свободы $f = n_1 + n_2 - 2 = 6 + 6 - 2 = 10$: $t_{\text{табл}}$=2,23. Так как $t_{\text{эксп}} < t_{\text{табл}}$, разница между средними результатами обоих титрований незначима и обе выборки можно считать принадлежащими одной генеральной совокупности с числом определений, равным $n = n_1 + n_2$.

Ход выполнения: выполнить задания.

Задание. Составление статистического распределения выборки.

Какие вещества, концентрация которых указана в таблице, не могут быть определены методом высокочастотного титрования?

Вещество	С, моль/дм3	Вещество	С, моль/дм3
HCl	1·10-8	MgSO4	2·10-6
NaOH	3·10-3	AgNO3	4·10-2

При определении калия в молоке методом фотометрии пламени были получены следующие результаты (мг/100г): 146,0; 144,2; 150,0; 149,1; 149,8; 150,0; 130,0; 146,0. Рассчитайте среднее содержание калия в исследуемом образце и интервальные значения измеряемой величины.

Форма отчета: устный отчет по решению задач.

Практическое занятие №18

Тема: построение полигона и гистограммы.

Цель: построение графиков вариационных рядов - полигона частот и гистограммы.

Оборудование: раздаточный материал.

Методические указания: изучить теоретический материал.

Пусть результаты выборки количественного признака X из генеральной совокупности представлены вариационным рядом. Кумулята , будучи функцией распределения выборки ,служит её интегральной вероятностной характеристикой. Для изучения локальных свойств нужна функция, аналогичная ряду распределения или плотности вероятности.

Точечный вариационный ряд наглядно можно представить с помощью полигона частот , а интервальный – с помощью гистограммы.

Полигоном частот называют ломаную ,отрезки которой соединяют точки с координатами $(x_1;n_1)$, $(x_2;n_2)$,…$(x_k;n_k)$, для полигона абсолютных частот и точки с координатами $(x_1,p_1^{¿})(x_2,p_2^{¿}),\ldots,(x_k,p_k^{¿})$ для полигона относительных частот.

Гистограммой абсолютных (относительных) частот называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основания которых есть частичные интервалы длиной h (одинаковой для всех интервалов),а высоты равны отношению $\frac{n_i}{h}$,т.е. пропорциональны частоте интервала n_i . Отношение $\frac{n_i}{h}$ называют плотностью частоты, а отношение $\frac{p_i^{¿}}{h}$ -плотностью относительной частоты.

Пример: представить графическое распределение размеров заработной платы сотрудников фирмы за неделю (в усл. ед.), если они получили следующую заработную плату:

152,74;176,66;162,48;167,72;181,09;155,00;196,17;169,60;172,88;182,47;181,69;186,91; 190,10;176,14;192,70;178,59;167,27;175,14;160,00;177,46;165,18;167,77;178,46;165,00; 185,20;157,02;172,14;192,22;179,40;191,03;188,68;169,51;200,15;178,47;176,33;179,05; 180,95;174,28;175,00;178,45;150,10;176,86;187,71;168,33;195,00;172,37;179,04;182,05; 186,19;190,05;196,27;209,28;203,16;168,52;200,00;196,30.

Найдём минимальное и максимальное значения вариант и объём выборки :

X_{max} =209,28 ; X_{min} =150,10 ; n = 56.

Применим формулу Стерджесса и посчитаем число интервалов:

$$h=\frac{x_{max}-x_{min}}{k}=\frac{x_{max}-x_{min}}{1+3,322\,lgn}=\frac{209.28-150,10}{1+3,322\,lg56}=10.$$

Построим интервальный вариационный ряд с интервалом h =10.

Интервалы заработной платы	150-160	160-170	170-180	180-190	190-200	200-210
n_i	4	11	18	10	9	4

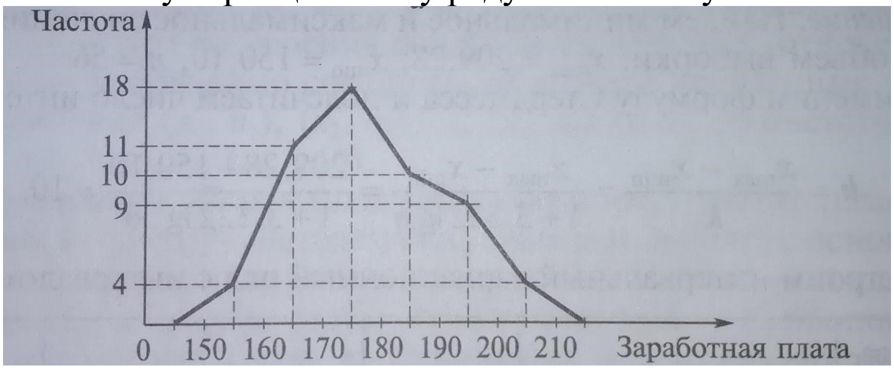
Для построения гистограммы вычислим высоты прямоугольников ,т.е. отношения n_i/h_i (плотности частоты),где все значения h_i =10 :

Интервалы заработной платы	150-160	160-170	170-180	180-190	190-200	200-210
n_i	4	11	18	10	9	4
n_i/h_i	0,4	1,1	1,8	1,0	0,9	0,4

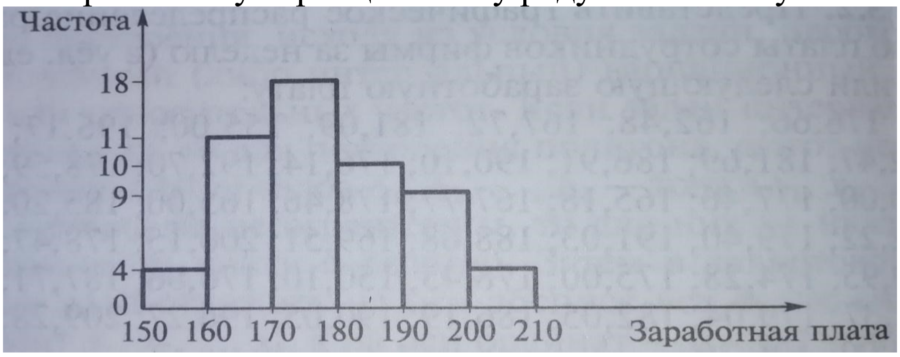
Для построения точечного вариационного ряда найдём середины интервалов :

x_i	155	165	175	185	195	205
n_i	4	11	18	10	9	4
n_i / h_i	0,4	1,1	1,8	1,0	0,9	0,4

Точечному вариационному ряду соответствует полигон :



Интервальному вариационному ряду соответствует гистограмма:



Ход выполнения: выполнить задания.

Задание. Составить графики распределения (полигон и гистограмму) по данным выборки

23,5;26,4;48,6;35,8;32,9;41,1;33,3;46,3; 49,9;34,1;45,2;33,6;42,4;47,3;32,4;34,5; 34,6;30,9;40,9;45,8;42,1;35,9;44,4;37,6; 30,2;42,2;27,8;28,6;28,5;40,6.

Форма отчета: устный отчет по решению задач.

4. ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ

4.1 Основные электронные издания:

О-1. Григорьев В.П. Математика: учебное издание / В.П. Григорьев, Т.Н. Сабурова. - Москва : Академия, 2024. - 368 с. (Специальности среднего профессионального образования). - URL: https://academia-moscow.ru/reader/?id=750150/. - Режим доступа: Электронная библиотека «Academia-library». - Текст : электронный

О-2. Блинова, С. П. Математика. Практикум для студентов технических специальностей : учебное пособие для спо / С. П. Блинова. — 3-

е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2024. — 196 с. — ISBN 978-5-507-49222-0. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/383441 (дата обращения: 15.02.2024). — Режим доступа: для авториз. пользователей.

4.2 Дополнительные источники:

Д-1. Богомолов, Н.В. Практические занятия по математике: Учеб пособие для средних проф. учеб. заведений. – 5-е изд., стер. – М: Высш. шк., 2000. – 495 с.

ЛИСТ ИЗМЕНЕНИЙ И ДОПОЛНЕНИЙ, ВНЕСЕННЫХ В МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

<table>
<tr><td colspan="2">№ изменения, дата внесения, № страницы с изменением</td></tr>
<tr><td>Было</td><td>Стало</td></tr>
<tr><td colspan="2">Основание:

Подпись лица, внесшего изменения</td></tr>
</table>